COMPENDIO

DI

ARITMETICA

DI

GIOVANNI LUVINI

PROFESSORE DI FISICA NELLA REGIA ACCADEMIA MILITARE

QUARTA RISTAMPA DELLA SESTA EDIZIONE STEREOTIPA

TORINO, 1870

TIPOGRAFIA ARNALDI, VIA S. AGOSTINO, 6

Vendibile presso la Libreria G. B. PARAVIA e Comp.

TORINO	FIRENZE	MILANO
Via Doragrossa	Via Ghibellina	Galleria De-Cristoforis
N. 23	N. 110	N. 16 e 17

Digitized by Google

I libri di matematica di Giovanni Luvini, i **Compendi** cioè di **Aritmetica**, di **Algebra elementare**, di **Geometria piana e solida** e di **Trigonometria rettilinea e sferica**, e le **Tavole di logaritmi a sette decimali**, ottennero il premio di primo grado nell'esposizione didattica sotto gli auspicii del Congresso pedagogico di Torino (1869).

Il **Compendio di Aritmetica**, adoperato come testo nella massima parte delle scuole tecniche, normali e magistrali e ne' ginnasi d'Italia, oltre ai principii generali dell'aritmetica ragionata ed una gran copia di esercizi pratici, contiene un sunto della storia dell'aritmetica dai primi tempi fino a noi. Già se ne fece la quarta ristampa della sesta edizione stereotipa.

Il **Compendio di Algebra elementare**, adoperato come testo nella massima parte delle scuole tecniche, degli istituti tecnici e de' licei, contiene, oltre le materie ordinarie, un sunto della storia dell'algebra elementare e le prime nozioni della teoria de' determinanti. Già se ne fece la terza ristampa della sesta edizione stereotipa.

Il **Compendio di Geometria piana e solida** e di **Trigonometria rettilinea e sferica**, pure adoperato come testo nella massima parte delle scuole tecniche, normali e magistrali e negli istituti tecnici, serve nelle scuole liceali quale complemento ai libri di Euclide, ed è indispensabile agli aspiranti al corso universitario di matematica. Esso è giunto alla sua quinta edizione.

Le **Tavole di logaritmi a sette decimali**, pubblicate simultaneamente in Italia, in Francia ed in Inghilterra, incontrarono generalmente il pubblico favore. Si sta ora facendo una ristampa dell'edizione italiana, oramai esaurita. Ne parlarono assai lusinghevolmente per l'autore giornali scientifici nostrali e stranieri. L'Accademia delle scienze di Torino in una relazione fatta al

8. 11.

COMPENDIO

DI

ARITMETICA

DI

GIOVANNI LUVINI

PROFESSORE DI FISICA NELLA REGIA ACCADEMIA MILITARE

QUARTA RISTAMPA DELLA SESTA EDIZIONE STEREOTIPA

1870

Presso il Libraio G. B. PARAVIA e Compagnia

TORINO	FIRENZE	MILANO
Via Doragrossa	Via Ghibellina	Galleria De-Cristoforis
N. 23	N. 110	N. 16 e 17

AVVERTENZA

In questa edizione ho creduto bene di introdurre tre nuovi caratteri o segnali, i quali, sebbene poco noti e meno adoperati in Italia ed in Francia, sono pure presso quasi tutte le altre nazioni consecrati dall'uso, e servono in alcuni casi ad abbreviare le scritture numeriche, in altri a togliere la confusione dipendente dal doppio significato di alcuni dei segnali presso di noi ora adoperati. Mi lusingo che gl'Italiani siano per fare buon viso a questa piccola innovazione, oramai adottata da una grande maggioranza de' dotti.

Ecco i nuovi caratteri:

$$\div, \quad {}^{\cdot}1\ {}^{\cdot}2\ {}^{\cdot}3\ldots, \quad \dot{1}\ \dot{2}\ \dot{3}\ldots$$

Il primo $\div$ è il segno di divisione da sostituirsi ai due punti : ora in uso presso di noi per quest'effetto. Ognuno comprende la convenienza di questo segno per togliere l'ambiguità del significato de' due punti.

Il secondo ·1, cioè il punto elevato scritto a sinistra di un numero, o tra due numeri, indica la frazione decimale. Posto fra due numeri, fa le veci della nostra virgola per separare la parte intiera del numero dalla parte frazionaria; posto a sinistra di un numero, ci avverte che le cifre di questo esprimono per ordine decimi, centesimi, millesimi, ecc., e che il numero non contiene parte intiera, senza bisogno di scrivere a sinistra lo zero indicante la mancanza degli intieri. Così ·13 equivarrà alla vecchia scrittura 0,13; così pure scriveremo rispettivamente 7·172, 390·7, ·028 invece di 7,172; 390,7; 0,028. Questa notazione, oltre al togliere l'inconveniente del doppio significato della virgola, va pure incontro ad un altro sconcio non meno grave, proveniente dall'uso generalmente invalso nel commercio, nelle amministrazioni ed anche nelle tipografie di separare di tre in tre, con virgole, le cifre de' numeri superiori a 999. Gli errori, a cui dà luogo quest'uso, possono essere grandissimi, quando si conservi la virgola per separare la parte intiera dalla parte frazionaria ne' numeri decimali. Per altra parte tale uso è troppo inveterato e radicato da non potersi combattere con semplici note di un trattato di aritmetica. La notazione inglese del punto elevato · sostituito alla virgola toglie di mezzo ogni difficoltà, e ci libera anche dal tedio di scrivere lo zero al posto degli intieri, quando questi mancano.

Digitized by Google

Il terzo segnale $\dot{0}$, $\dot{1}$, $\dot{2}$, $\dot{3}$...., cioè il punto scritto al di sopra della cifra indica la periodicità delle frazioni decimali, ed il principio e la fine del periodo. Si scrive per questo effetto il punto sulla prima e sull'ultima cifra del periodo, cosicchè sussistono le seguenti eguaglianze tra la nuova e la vecchia maniera di notazione:

$$\cdot\dot{2}3\dot{1} = 0{,}231\ 231\ 231\ 231.......$$
$$\cdot 0\dot{3} = 0{,}033333.....$$
$$25\cdot\dot{7} = 25{,}77777....$$
$$\cdot 102\dot{7}\dot{0} = 0{,}10270\ 70\ 70\ 70....$$

La concisione della nuova scrittura è troppo evidente, da non abbisognare di commenti.

Si avverta poi, che bisognerà sbandire il *punto* come segno di moltiplicazione, sempre nello scopo di togliere ogni ambiguità.

Avendo la parola, me ne servo per una dichiarazione forse non inutile. È quasi invalso il sistema, presso nuovi trattatisti, di convertire la scienza in polemica, criticando l'uso di questo o di quel vocabolo, sentenziando falsa questa o quell'altra dimostrazione, gingillando, per un eccessivo amore (o pretensione) di esattezza, in certi nonnulla che i principianti sanno meglio da sè di quello che possano imparare dai libri, e facendola da barbassoro col dare ad ogni piè di pagina questo o quel consiglio ai maestri. Cosa singolare poi! questi medesimi, non ostante il nuovo linguaggio più proprio, le nuove spiegazioni più esatte, vanno lamentandosi che i loro allievi non arrivano a comprendere certe parti dell'aritmetica, e propongono la soppressione di queste ne' pubblici programmi scolastici.

Le parole hanno il significato che agli uomini piace di attribuir loro, e molte espressioni apparentemente inesatte hanno un'impronta di precisione tutta loro propria, derivata dalla convenzione; mutarle sarebbe fare un passo retrogrado. Adoperate il linguaggio comune, il linguaggio convenzionale, non isminuzzate troppo le cose che ciascuno può sapere da sè, e gli scuolari v'intenderanno. Di ciò mi fa fede una ben lunga pratica nell'insegnamento.

Torino, via Po, n° 9,
28 *agosto* 1865.

CAPO I.

PRELIMINARI

§ 1. Definizioni.

1. *Quantità* è tutto ciò che è suscettibile d'aumento o di diminuzione.

Esempi. Un tavolino, un pomo, un cavallo, ecc., sono altrettante quantità, perchè possiamo benissimo immaginare due tavolini, un mezzo pomo, quattro cavalli, ecc. Egualmente cento uomini, cinque soldi, venti libre, quindici metri, una linea qualunque, una superficie, un volume, un peso, la velocità di un corriere, ecc., sono altrettante quantità.

2. *Unità* è quella quantità indivisibile, o riguardata come indivisibile, alla quale si paragonano tutte le quantità della medesima specie. Così un tavolino è l'unità a cui si riferisce un numero qualsivoglia di tavolini; una bandiera, un'arma, un telescopio, sono altrettante unità alle quali si riferisce rispet-

tivamente un numero qualsivoglia di bandiere, di arme, di telescopi.

3. *Numero* è un aggregato di unità o di parti di unità.

4. I numeri, per rispetto all'oggetto che rappresentano, sono *astratti* o *concreti:* numeri astratti sono quelli che non esprimono quale sia l'unità ch' essi rappresentano; concreti quelli che la esprimono.

Così cinque uomini, sette donne, cento orologi, sono numeri concreti, esprimendo rispettivamente ciascuno di essi che l'unità rappresentata è un uomo, una donna, un orologio. Al contrario i numeri cinque, sette, cento, che non esprimono la cosa che rappresentano, sono astratti.

Gli astratti diconsi anche *indeterminati;* i concreti, *determinati.*

5. Questi ultimi poi sono *omogenei,* od *eterogenei,* secondochè si riferiscono tutti ad una medesima unità, ovvero ad unità differenti. Così sette montagne, trenta montagne, cinque montagne, sono numeri omogenei; sette montagne, trenta uomini, cinque metri sono numeri eterogenei.

6. I numeri diconsi pure intieri o frazionari secondochè si compongono di unità intiere o di parti di unità.

Nei tre primi Capi di questo Compendio non si parla che dei numeri intieri.

§ 2. Numerazione.

7. I numeri si possono esprimere con parole o con segni di scrittura. L' arte di esprimerli nell' uno e nell'altro modo dicesi *numerazione.* Quindi la nume-

razione è parlata o scritta. La numerazione *parlata* si definisce l'arte di esprimere i numeri con parole; la *scritta*, l'arte di esprimere i numeri con segni di scrittura.

La prima s'impara da ognuno di noi fin da ragazzi, e tutti conosciamo i nomi con cui si esprimono i numeri.

Eccone un'idea. I primi numeri formati, aggiungendo successivamente un'unità al numero precedente, e partendo dall'*uno*, si esprimono coi nomi *uno*, *due*, *tre*, *quattro*, *cinque*, *sei*, *sette*, *otto*, *nove*, *dieci*.

Quest' ultimo numero si riguarda come un tutto indivisibile, o come una nuova unità, detta *decina* o *unità di secondo ordine*, per distinguerla dall' *uno* semplice che si dice *unità di primo ordine*. Le decine si contano da uno fino a nove, ed i numeri formati aggiungendo successivamente una decina, partendo dal dieci, si esprimono coi nomi *dieci*, *venti*, *trenta*, *quaranta*, *cinquanta*, *sessanta*, *settanta*, *ottanta*, *novanta*.

Un gruppo di dieci decine si riguarda come un nuovo *uno*, e prende il nome di *cento* o *centinaio* o *unità di terzo ordine*.

I numeri compresi tra dieci e venti, tra venti e trenta, tra trenta e quaranta,.... tra novanta e cento si esprimono aggiungendo al nome che rappresenta le decine il numero delle unità di primo ordine espresso col nome relativo *uno, due, tre,..... nove*. Così i nove numeri compresi tra il venti ed il trenta si esprimono coi nomi *ventuno*, *ventidue*, *ventitre*, *ventiquattro*,.... *ventinove;* tra il trenta ed il quaranta *trentuno*, *trentadue*, *trentatre*,..... *trentanove;*..... tra il novanta ed il cento, *novantuno*, *novantadue*,.... *novantanove*. I soli numeri compresi fra il dieci ed

il venti fanno una piccola eccezione a questa regola, nominandosi in ordine *undici*, *dodici*, *tredici*, *quattordici*, *quindici*, *sedici*, *diciassette*, *diciotto*, *diciannove*. Questi nomi, però, com'è facile vedere, sono composti analogamente ai precedenti.

Le unità di terzo ordine o le centinaia contansi pure da uno fino a nove, e diconsi, in ordine, *cento*, *duecento, trecento,..... novecento*. Dieci centinaia formano un nuovo *uno*, che dicesi *mille* o *migliaio* o *unità di quarto ordine*. I numeri compresi tra cento e duecento, tra duecento e trecento,..... tra novecento e mille si esprimono aggiungendo al numero delle centinaia uno dei nomi sopra notati dall'*uno* al *novantanove*.

Dieci unità di quarto ordine ne formano una di quinto; dieci di quinto una di sesto, e così di seguito all'infinito. Queste unità degli ordini successivi, partendo dal mille, esprimonsi coi nomi mille, diecimila, centomila, milione, dieci milioni, cento milioni, bilione, dieci bilioni, cento bilioni, trilione, dieci trilioni, cento trilioni, quattrilione, ecc., sempre nello stesso modo all'infinito.

Dal mille al milione si rappresentano i numeri pronunciando prima il numero delle migliaia intiere espresso con uno dei numeri dall'uno al novecento novantanove seguito dalla parola *mille* o *mila*, secondochè vi ha un solo migliaio o più migliaia, e facendo tosto susseguire il nome del numero eccedente le migliaia.

Dal milione al bilione si rappresentano i numeri esprimendo successivamente il numero de' milioni, delle migliaia e delle unità semplici. Lo stesso dicasi dei numeri compresi da un bilione ad un trilione, da un trilione ad un quattrilione, ecc. Il bilione, detto

talvolta alla francese *miliardo*, vale mille milioni; il trilione mille bilioni, il quattrilione mille trilioni, ecc.

NB. Trovasi in alcuni libri il bilione adoperato nel significato di un milione di milioni, il trilione in quello di un milione di bilioni, e così di seguito, ma sembra assai più naturale e semplice la monenclatura sopra descritta, alla quale ho creduto dovermi attenere siccome più universalmente conosciuta e adottata.

8. In iscrittura i numeri si rappresentano con caratteri o segni detti *cifre*. Convien bene stabilire la distinzione tra *cifre* e *numeri*. Questi sono un aggregato di unità, quelle il segno di scrittura che serve ad esprimere questo aggregato. I numeri differenti sono infiniti; le cifre differenti, nel sistema volgare di numerazione, non sono che dieci.

Ecco questi dieci segni:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Gli ultimi nove diconsi *cifre significative* e leggonsi per ordine: *uno*, *due*, *tre*, *quattro*, *cinque*, *sei*, *sette*, *otto* e *nove*; il primo dicesi *cifra insignificativa* e leggesi *zero*.

9. Mediante una semplice convenzione si rappresentano con questi dieci segnali tutti i numeri i quali sono infiniti.

Ecco la convenzione. Ogni cifra ha due valori, uno assoluto e l'altro relativo o di posizione. Il primo è quel valore che rappresenta la cifra allorchè non è accompagnata da altre cifre. Così la cifra 3 significa *tre*, e questo è il valore assoluto di essa cifra. Il valore relativo è quello che acquista la cifra dalla posizione che occupa nel numero scritto, allorchè è accompagnata da altre cifre. Così nel numero 234 la cifra 4, che trovasi a destra, rappresenta il suo valor naturale od assoluto *quattro*; la cifra 3, che si trova nella

seconda sede, camminando da destra a sinistra, rappresenta *tre decine*, ossia un valore decuplo di quello che avrebbe nella prima sede a destra, però si legge *trenta;* la cifra 2 finalmente, la quale è nella terza sede, rappresenta *due centinaia*, ossia un valore centuplo di quello che avrebbe nella prima sede a destra, o decuplo di quello che avrebbe nella seconda sede da destra a sinistra.

In generale in ogni numero intiero scritto, la cifra a destra rappresenta le unità semplici, ossia il suo valore assoluto, e tutte le altre rappresentano un valore tante volte dieci volte maggiore del loro valore assoluto, quante sono le sedi di cui queste cifre trovansi più a sinistra della prima.

In conseguenza camminando sempre da destra a sinistra, la prima cifra rappresenta le unità semplici; la seconda le decine; la terza, le decine di decine, ossia le centinaia; la quarta le decine di centinaia, ossia le migliaia; la quinta le decine di migliaia; la sesta, le decine di decine di migliaia, ossia le centinaia di migliaia; la settima, le decine delle centinaia di migliaia, ossia i milioni; l'ottava le decine di milioni; la nona, le centinaia di milioni; la decima, i bilioni; l'undecima, le decine di bilioni; la duodecima, le centinaia di bilioni; la decimaterza, i trilioni; e così di seguito.

Ogni cifra in un numero scritto rappresenta un valore decuplo di quello che avrebbe se fosse di una sede più a destra, centuplo di quello che avrebbe se fosse di due sedi più a destra, mille volte maggiore di quello che avrebbe se fosse di tre sedi più a destra, e così di seguito. Viceversa, ogni cifra rappresenta un valore che è il decimo di quello che avrebbe se fosse di una sede più a sinistra, il centesimo di quello

che avrebbe se fosse di due sedi più a sinistra, il millesimo di quello che avrebbe se fosse di tre sedi più a sinistra, e così di seguito.

10. La cifra zero 0, che da sè significa niente, serve nel numero scritto a segnare quelle sedi le cui unità corrispondenti non esistono. Così se si volessero esprimere quattro centinaia e cinque unità semplici, mancando le decine, si scriverà uno zero nella seconda colonna, e si avrà il numero 405, che si legge *quattrocento e cinque.*

Se avessimo tralasciato lo zero, avremmo avuto 45, che varrebbe quattro decine e cinque unità, ossia *quarantacinque.*

11. Egli è evidente che, coi mezzi precedentemente spiegati, qualunque numero può venire espresso, vuoi con parole, vuoi con cifre, poichè qualunque numero può decomporsi in gruppi di unità de' differenti ordini in modo, che ogni gruppo contenga meno di dieci unità. Infatti, qualunque sia il numero proposto, possiamo decomporlo, realmente o mentalmente, in tanti gruppi formati ciascuno di dieci unità semplici, più un gruppo che avrà meno di dieci unità. In altri termini il numero dato sarà composto di un numero intiero di decine, più un certo numero di unità semplici, minore di dieci e che potrà anch'essere zero. In egual modo il numero delle decine si può ridurre in gruppi di dieci decine ciascuno, ossia di centinaia, più un gruppo che conterrà meno di dieci decine; cosicchè il numero dato si comporrà di un numero intiero di centinaia, più un numero di decine minore di dieci, più ancora un numero di unità minore di dieci. Continuando allo stesso modo si decomporranno le centinaia in migliaia e centinaia; le migliaia in decine

di migliaia e migliaia, ecc., in modo che in ciascuno degli ordini il numero esprimente il gruppo sia minore di dieci.

12. Per leggere un numero qualsivoglia scritto, basterà porre attenzione al significato sopra definito di ciascuna cifra di esso numero.

Darò la regola materiale per la lettura di qualunque numero intiero, che è la seguente:

Partendo da destra e andando verso sinistra, si scomponga con virgole, o con altri segni, il numero proposto in tanti membri ternari, ossia di tre cifre l'uno. L'ultimo membro a sinistra potrà avere anche due od una sola cifra. Si legga ciascun membro separatamente, cominciando da sinistra, come se formasse un numero da sè, ed infine della lettura di ciascun membro si pronunci la parola che significa l'ordine di unità rappresentato dall'ultima cifra del membro medesimo. Così in fine della lettura dell'ultimo membro a destra si pronuncierà niente, rappresentando l'ultima cifra le unità semplici; dopo la lettura del penultimo membro, si pronuncierà *migliaia;* dopo quella del terz'ultimo, quart'ultimo, quint'ultimo, ecc., membro, si pronuncierà rispettivamente milioni, bilioni, trilioni, ecc. I membri che sono composti intieramente di cifre zero si saltano nella lettura del numero. Ecco alcuni esempi: il numero 1072945800110 si scompone ne' seguenti membri 1,072,945,800,110, e si legge: un trilione, settantadue bilioni, novecento e quarantacinque milioni, ottocento mila, cento e dieci. Il secondo membro a sinistra, che è 072, si legge settantadue, perchè lo zero a sinistra non fa altro ufficio che quello di tenere il luogo delle centinaia che mancano. Così il numero 92000702345009813 si scompone nei membri seguenti: 92,000,702,345,009,813 e si

legge: novantadue quattrilioni, settecento e due bilioni, trecento quarantacinque milioni, novemila, ottocento e tredici. Sia ancora il numero 7000000075001, che si scompone ne'membri seguenti: 7,000,000,075,001 e si legge: sette trilioni, settantacinque mila e uno.

Il sistema di numerazione sopra spiegato dicesi *decimale*. Il numero *dieci* dicesi *base* di esso sistema.

13. Da quanto precede segue come corollario che, scrivendo a destra di un numero intiero uno zero, tale numero viene moltiplicato per dieci, cioè avrà, dopo l'aggiunta dello zero, un valore decuplo di quello che aveva prima. Infatti, per lo zero aggiunto, ogni cifra del numero proposto rappresenta un valore decuplo di quello che aveva prima, essendo trasportata di una sede verso sinistra per rispetto al posto che prima occupava nel numero scritto. Per la stessa ragione, scrivendo a destra di un numero intiero due, tre, ecc., zeri, il numero si moltiplica per 100, 1000, ecc.

Viceversa, sopprimendo uno, due, tre, ecc., zeri a destra di un numero intiero, questo viene diviso per 10, 100, 1000, ecc., cioè avrà, dopo la soppressione, un valore dieci, cento, mille, ecc., volte minore di quello che aveva prima. Ciò è chiaro per chiunque osservi che la soppressione degli zeri fa trasportare ogni cifra del numero di altrettante sedi verso destra, quanti sono gli zeri soppressi.

14. Ogni numero intiero diverso dall'uno può prendersi per base di un sistema di numerazione. In ogni sistema la base costituisce l'unità di secondo ordine. Le unità degli ordini successivi sono formate da tante unità dell'ordine immediatamente inferiore, quante sono le unità semplici o di primo ordine nella base.

Per esprimere convenientemente con parole i numeri in sistemi di numerazione diversi dal decimale, converrebbe creare nuovi nomi, o cambiare il significato ai nomi ora in uso.

Per esprimerli poi in iscritto in ogni sistema richiedonsi tante cifre o segni, quante unità semplici sono nella base. Uno di questi segni deve in ogni sistêma rappresentare lo *zero*, gli altri rappresentano i numeri dall'uno fino alla base diminuita di un'unità inclusivamente. Il numero che serve di base si rappresenta colla cifra che esprime l'*uno* seguita a destra dalla cifra che significa *zero*. Un numero qualunque poi si scrive facilmente scomponendolo nelle unità dei diversi ordini relative al sistema di cui si tratta. Le unità del primo ordine si scrivono con una cifra sola nella prima colonna a destra; quelle di secondo ordine, nella seconda colonna, e così di seguito.

Il cambiamento del sistema di numerazione nell'uso universale presenterebbe tali difficoltà da potersi dire come impossibile.

§ 3. Spiegazione dei segnali.

15. Nel corso di questo Compendio faremo uso di alcuni segnali che è bene conoscere fin da principio. Questi sono il $+$ che si legge *più*, e significa che la quantità che viene dopo al segno si deve aggiungere alla precedente; il $-$ che si legge *meno*, e significa che la quantità che viene dopo al segno si deve sottrarre dalla precedente; il $\times$ che si legge *moltiplicato per*, e significa che la quantità precedente il segno si deve moltiplicare per la seguente; il $\div$ che si legge

diviso per, e significa che la quantità che precede il segno deve dividersi per quella che segue; il $>$ che si legge *maggiore di*, oppure *è maggiore di*, oppure ancora, *è superiore, supera*, ecc., e significa che la quantità precedente il segno è maggiore della seguente; il $<$ che si legge *minore di* oppure *è minore di*, e significa che la quantità precedente il segno è minore della seguente; l'$=$ che si legge *eguale*, oppure *è uguale a*, *uguaglia*, ecc., e significa che la quantità scritta prima del segno è uguale a quella che viene dopo. La scrittura che indica che una quantità è uguale ad un'altra dicesi *eguaglianza*. Le due quantità eguali separate dal segno $=$ diconsi i *membri* dell'eguaglianza; quella che sta a sinistra forma il *primo membro*, l'altra il *secondo*.

CAPO II.

OPERAZIONI SUI NUMERI INTIERI

§ 1. Preliminari.

16. Avanti di esporre le regole relative alle operazioni sui numeri intieri, giova stabilire i seguenti principii, che sono in parte verità per se stesse evidenti o assiomi, ed in parte corollari di quanto si disse parlando della numerazione.

1° Ogni numero può riguardarsi come composto di tante parti quante sono le sue unità dei diversi ordini. Così il numero 1859 si può riguardare come composto dalle parti 1000, 800, 50, e 9, le quali riunite formano il numero proposto.

2° Ogni numero può riguardarsi come composto di decine e di unità, ovvero di centinaia e di unità, ovvero di migliaia e di unità, ecc. Così il numero 1859 contiene 185 decine e nove unità. Infatti già si vede, per la natura stessa del sistema decimale di numerazione, che le due ultime cifre rappresentano cinque decine e nove unità; osservando poi che un centinaio vale dieci decine, apparirà che la cifra 8, che rappresenta centinaia, si può leggere 80 decine, le quali colle cinque decine, che vengono dopo, fanno 85 decine. Finalmente il migliaio valendo dieci centinaia, varrà pure dieci volte dieci decine, ossia cento decine: dunque avremo in tutto 185 decine e nove unità, come si voleva dimostrare.

Per la medesima ragione il numero 1859 si può leggere 18 centinaia e 59 unità, ovvero un migliaio

e 859 unità, ovvero ancora zero decine di migliaia e 1859 unità, ecc.

3° Scomponendo una o più unità di un ordine in quelle degli ordini seguenti inferiori, ogni numero si può leggere o scomporre in un numero grandissimo di modi. Così il 1859, colla riduzione di una decina in unità, si può riguardare come composto di un migliaio, 8 centinaia, 4 decine e 19 unità. Riducendo di più un centinaio in decine, esso si può leggere un migliaio, 7 centinaia, 14 decine e 19 unità. Egualmente il numero 8005, col ridurre un migliaio in centinaia, un centinaio in decine, ed una decina in unità, si può leggere 7 migliaia, 9 centinaia, 9 decine e 15 unità.

4° Allorquando si tratta di ridurre più numeri in un solo, ossia di sommarli, per ottenere il risultato basta di riunire insieme separatamente tutte le parti nelle quali i numeri dati si possono scomporre. Così se sommeremo tutte le unità semplici dei numeri dati, e poi successivamente tutte le decine, tutte le centinaia, ecc., e riuniremo i risultati trovati, avremo il risultato domandato.

5° Allo stesso modo, se si tratta di levare un numero da un altro, si può ottenere il risultato levando successivamente dalle diverse parti in cui il secondo numero si può scomporre le parti corrispondenti del primo.

§ 2. Addizione.

17. L'addizione è quell'operazione dell'aritmetica per cui si uniscono in un solo numero più numeri omogenei dati. Il numero che si ottiene dalla riunione dei dati dicesi *somma* o *totale*.

Se i numeri da sommare sono di una sola cifra, il risultato dell'addizione si trova facilmente a memoria. Così è facile riconoscere che $4+3$ fa 7, ossia, come suolsi scrivere, $4+3=7$; egualmente $5+4+3=12$. Bisogna abituarsi a trovare questa somma a memoria, senza aggiungere, coll'aiuto delle dita, al primo numero le singole unità del secondo, alla somma dei due primi le singole unità del terzo, e così di seguito.

Per aiuto de' principianti alcuni sogliono proporre la seguente tavola di addizione di due numeri qualunque di una cifra.

TAVOLA DI ADDIZIONE SEMPLICE

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

I due numeri da sommare si cercano uno nella prima linea orizzontale superiore, l'altro nella prima colonna verticale a sinistra; la loro somma si trova nella casella d'incrociamento della colonna verticale contenente il primo numero e della linea orizzontale contenente il secondo. Così per avere la somma di 7 con 6 cerco il 7 nella linea superiore ed il 6 nella colonna a sinistra, e trovo la somma 13 nella casella d'incontro della colonna verticale che passa pel 7 colla linea orizzontale che passa pel 6. Si sarebbe potuto cercare il 6 nella linea superiore ed il 7 nella colonna a sinistra, e si sarebbe trovato lo stesso risultato 13.

Chi ha pratica di numeri somma pure, a memoria, numeri di più di una cifra, purchè non troppo grandi. In generale però per sommare numeri qualunque si ricorre ad una regola fondata sul 4° principio del § precedente.

Siano per esempio da sommare i numeri 341, 52 e 206, o in altri termini, cerchisi il valore di $341 + 52 + 206$. È chiaro che la somma si comporrà di $3 + 2 = 5$ centinaia, $4 + 5 = 9$ decine, e $1 + 2 + 6 = 9$ unità, e però varrà 599. Per la stessa ragione avremo

$$2709 + 343 + 1715 + 7895$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} 2 + 1 + 7, & \text{ossia 10 migliaia} \\ + 7 + 3 + 7 + 8, & \text{ossia 25 centinaia} \\ + 4 + 1 + 9, & \text{ossia 14 decine} \\ + 9 + 3 + 5 + 5, & \text{ossia 22 unità} \end{array} \right.$$

$=$ 10 migliaia $+$ 25 centinaia $+$ 14 decine $+$ 22 unità. Ora (16) 25 centinaia fanno 2 migliaia e 5 centinaia, 14 decine fanno un centinaio e 4 decine,

e 22 unità fanno 2 decine e 2 unità. Dunque la somma cercata sarà ancora eguale a

$$\begin{array}{ll} 10 + 2, & \text{ossia } 12 \text{ migliaia} \\ + \; 5 + 1, & \text{ossia } \;\, 6 \text{ centinaia} \\ + \; 4 + 2, & \text{ossia } \;\, 6 \text{ decine} \\ + \; 2 \text{ unità}, & \end{array}$$

ossia sarà eguale a 12662.

Riflettendo intorno alle operazioni fatte sugli esempi che precedono, si scorge che per sommare più numeri basta sommare separatamente le unità dei singoli ordini, decomporre ciascuna somma parziale (nell'ipotesi ch'ella sia maggiore di 9) in unità dell'ordine rispettivo e dell'ordine immediatamente superiore, riunire queste ultime alla somma delle unità del loro ordine, e scrivere ordinatamente la serie delle cifre rappresentanti i singoli risultati parziali. Ricavasi quindi la seguente regola pratica.

18. Per sommare più numeri, si scrivono questi gli uni sotto gli altri in modo che le unità di uno stesso ordine siano in una medesima colonna verticale; si tira sotto di essi una linea orizzontale, che serve a separarli dal risultato; indi si uniscono separatamente in un solo tutti i numeri rappresentati dalle cifre di ciascuna colonna, cominciando dalla destra; la somma parziale ottenuta di ciascuna colonna, ove sia minore di dieci unità, si scrive sotto la linea nella colonna corrispondente; ove poi non sia minore di dieci, si scomporrà in decine ed unità; queste si scrivono sotto la linea nella colonna corrispondente, e le decine si ritengono per aggiungerle alla somma della colonna seguente a sinistra come altrettante unità; la somma prove-

niente dall'ultima colonna a sinistra si scriverà sotto la linea tale quale si troverà.

Esempio. Siano da sommare i numeri seguenti: 130451, 48930, 5001, 11798; si scriveranno come segue:

```
130451
 48930
  5001
 11798
------
196180
```

Tirata la linea sotto ai numeri da sommare, trovo la somma delle unità semplici, nella prima colonna a destra, eguale a 10, ossia una decina e zero unità; scrivo *zero* sotto la linea in quella colonna e ritengo la decina per unirla, come unità, alla somma de' numeri della colonna seguente. Questa somma in un coll'unità aggiunta fa 18, ossia una decina e otto unità. Scrivo otto sotto la linea e ritengo la decina, che conto come uno, per la colonna seguente a sinistra, la quale sommata coll'unità aggiunta, mi dà 21, ossia due decine ed un' unità; si scrive questa sotto la linea, e si ritengono le due decine per riunirle come altrettanti *uni* alla colonna seguente, la quale dandoci 16, ossia una decina e sei unità, scrivo 6 sotto la linea, e ritengo un'unità da aggiungere alla colonna seguente. Questa ci dà 9; scrivo 9 sotto la linea. Finalmente l'ultima colonna dandoci 1, scrivo 1 sotto la linea nella medesima colonna, e la somma è fatta.

Digitized by Google

Ecco alcuni altri esempi (*):

409712	19780	88703
3007	97012	90102
12359	45131	75007
102139	172	309
527217	162095	254121

§ 3. Sottrazione.

19. La sottrazione è quella operazione dell'aritmetica, per cui si leva un numero dato da un altro maggiore omogeneo parimente dato.

Questi due numeri si chiamano uno *minuendo*, l'altro *sottraendo*. Il sottraendo è quello che si leva via; il minuendo è quello da cui si leva il sottraendo. Il risultato dell'operazione si chiama *resto*, o *residuo, differenza, eccesso*.

20. Per fare la sottrazione, si scrive il sottraendo sotto il minuendo in modo che le unità del medesimo ordine siano nella medesima colonna verticale; si tira una linea sotto al sottraendo per separarlo dal risultato; quindi, cominciando da destra e andando verso sinistra, si levano le singole unità dei diversi ordini del sottraendo dalle unità corrispondenti del minuendo, e i resti parziali ottenuti

(*) Si esercitino i principianti sopra un grandissimo numero di esempi somiglianti a questi, e che essi possono prendersi arbitrariamente. Dipende, più che comunemente non si crede, da questi primi esercizi la facilità sia d'intendere sia d'applicare i principii ulteriori delle matematiche. Quest'avvertenza intendasi come ripetuta per tutte le operazioni che seguono.

in ciascuna colonna si scrivono sotto la linea nella colonna corrispondente. Il numero che ne risulterà sarà il resto cercato. Infatti si saranno in tal modo levate le singole parti del sottraendo dal minuendo proposto (16, 5°).

Ma può accadere che una cifra del sottraendo abbia un valore maggiore della cifra corrispondente del minuendo. In tal caso, applicando il 3° principio del 1° § di questo Capo, si accresce di dieci unità la cifra del minuendo, da cui non si può sottrarre la cifra corrispondente del sottraendo, diminuendo però di una unità la cifra seguente a sinistra nel minuendo. Se quest'ultima cifra fosse *zero*, si conterebbe come *nove* e si diminuirebbe di una unità la cifra che segue a sinistra. Se questa pure e le seguenti ancora fossero *zero* si conterebbe ogni zero come *nove*, e si diminuirebbe di una unità la prima cifra significativa che s'incontrerebbe a sinistra nel minuendo.

Infatti, operando in tal modo, non si fa altro che applicare il principio 5° del § 1° di questo Capo, levando successivamente le unità de' diversi ordini del sottraendo dalle unità corrispondenti, nelle quali si può scomporre il minuendo pel 3° principio del § citato.

21. *Esempio*. Sia da sottrarre il numero 30912 dal numero 415017. L'operazione si dispone e si fa come segue:

$$\begin{array}{r} 415017 \\ 30912 \\ \hline 384105 \end{array}$$

Scritti il sottraendo ed il minuendo come si vede, e tirata la linea, si dice così, cominciando a destra: sette meno due, *cinque*, e si scrive 5 sotto; 1 meno 1, *zero*, e si scrive *zero* sotto la linea; *zero* meno 9, non si può; perciò si dice 10 meno 9, *uno*, e si scrive 1. Il *cinque* della colonna seguente diventerà *quattro*, perchè lo zero a destra si è contato come dieci (ciò torna a dire 40 e 10 invece di dire 50); onde si dirà 4 meno *zero*, 4, e si scrive 4 sotto; 1 meno 3, non si può; dico 11 meno 3, *otto*, scrivo otto sotto; finalmente 3 meno niente, 3. Ho letto 3 in vece di 4, perchè l'*uno* a destra si è contato per 11, cosicchè ho scomposto il 41 in 30 più 11.

Ecco ancora alcuni esempi:

$$\begin{array}{r} 723000192 \\ 1920819 \\ \hline 721079373 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1012 \\ 987 \\ \hline 25 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 140191 \\ 113212 \\ \hline 26979 \end{array}$$

§ 4. Prova dell'addizione e della sottrazione.

22. Non per difetto delle regole date, ma per mancanza di attenzione può accadere che, nel fare le operazioni precedenti, si commetta qualche sbaglio. L'operazione per cui si verifica se un'operazione è ben fatta dicesi *prova*.

La miglior prova dell'addizione consiste nel rifare l'operazione procedendo in ordine inverso nel sommare i numeri di ciascuna colonna; vale a dire

procedendo nella sommazione dei numeri di ciascuna colonna d'alto in basso, se nella prima operazione si era proceduto di basso in alto, e viceversa.

Si può anche ripetere l'operazione scrivendo i numeri da addizionarsi in ordine diverso da quello in cui erano scritti nella prima operazione fatta.

Si suole anche dare per la prova dell'addizione la seguente regola fondata su ciò, che se da un tutto si levano successivamente le singole parti che lo compongono, il residuo dev'essere zero. Applichiamo questo principio all'esempio seguente:

	30987
	19230
	3896
	87521
Somma	141634
Residui	22210

La regola materiale è questa: dopo di aver trovato la somma 141634, cominciando dalla prima colonna a sinistra de' numeri dati, faccio la somma de' numeri in essa contenuti, e trovo 12; sottraggo 12 dal 14 che sta sotto a questa colonna, e scrivo sotto al 4 il residuo 2. Questa cifra supposta scritta a sinistra della terza cifra 1 della somma, darebbe con essa 21; sottraggo da 21 la somma 19 della seconda colonna de' numeri dati, e scrivo il resto 2 sotto l'*uno*. Questo resto 2, supposto scritto a sinistra della quarta cifra 6 della somma, darebbe 26, dal quale numero sottraendo la somma 24 della terza colonna dei numeri dati, si ottiene il resi-

duo 2 che si scrive sotto il 6. Così si continua fino all' ultima colonna a destra dei numeri dati; se l'operazione è ben fatta, si riconosce da ciò, che il residuo corrispondente all'ultima colonna è *zero*.

La ragione di questa regola si comprende tenendo conto del principio sopra enunciato, ed osservando che la somma trovata 141634 si può scomporre nelle seguenti parti: 12 decine di migliaia, 19 migliaia, 24 centinaia, 22 decine, 14 unità.

Alcuni adoperano anche quest'altro modo di prova. Sommano tutti i numeri dati da sommare, meno uno di essi, ed il totale che si trova, sottratto dalla somma già prima trovata, deve lasciare per resto il numero che non si è aggiunto agli altri nella seconda addizione. Così, nell'esempio ora arrecato, sommiamo i tre ultimi dei quattro numeri dati, e troveremo la somma 110647. Sottraendo questo numero dal totale 141634, già prima trovato, si ottiene per resto 30987, che è il primo dei numeri dati, trascurato nella seconda addizione. Dunque ciò è segno che l'operazione è stata ben fatta. Ecco il quadro delle operazioni:

$$\begin{array}{r} 30987 \\ 19230 \\ 3896 \\ 87521 \\ \hline 141634 \\ 110647 \\ \hline 30987 \end{array}$$

Sotto ai quattro numeri dati si vede scritta la loro somma 141634, e sotto a questa la somma dei tre

ultimi de' numeri dati, la quale è 110647; finalmente l'ultimo numero, 30987, è il resto della prima somma diminuita della seconda.

23. Per la prova della sottrazione notiamo che il risultato di questa operazione indica di quanto il minuendo eccede sul sottraendo; onde se si aggiunge al sottraendo il resto, la somma deve riprodurre il minuendo. Per la qual cosa, per verificare se la sottrazione è ben fatta, basterà sommare il sottraendo col resto. Se la somma che si troverà sarà eguale al minuendo, l'operazione è ben fatta, altrimenti no.

Esempio:

Minuendo	1549
Sottraendo	198
Resto	1351
Somma del resto col sottraendo	1549

NB. Il risultato dell'addizione è sempre un numero omogeneo coi numeri addizionati, come pure il risultato della sottrazione è sempre omogeneo col minuendo e col sottraendo.

---

§ 5. Esercizi di addizione e di sottrazione.

24. Verificare il seguente quadro statistico, nel quale il Regno d'Italia è diviso in 14 Compartimenti:

COMPARTIMENTI TERRITORIALI	Superficie in chilom. quadrati	Popolazione al 31 dic. 1861	Maschi	Sanno leggere e scrivere		Popolazione da 0 a 5 anni		Sanno leggere e scrivere da 0 a 5 anni	
				maschi	femmine	maschi	femmine	maschi	femmine
Piemonte	29004	2764263	1378389	639287	336620	188947	188357	690	626
Liguria	5324	771473	376032	128381	71339	52343	52248	200	205
Lombardia . . .	22287	3104838	1574029	592468	372688	215589	212139	600	680
Emilia	20527	2005834	1033631	220337	99578	136152	132181	263	169
Umbria	9633	513019	263548	44099	16974	34364	32894	46	32
Marche	9714	883073	437069	77267	32392	59060	56428	87	38
Toscana	24031	1967067	1003185	241774	110249	134011	129362	305	187
Abruzzi e Molise.	17290	1212835	592985	88077	21589	82324	81804	125	37
Campania	17967	2625830	1310221	228399	89361	168337	164713	372	264
Puglia	22120	1315269	647887	77920	26857	96297	93863	84	39
Basilicata	10676	492959	240300	30405	6309	31236	30593	13	1
Calabrie	17257	1140396	560141	67568	11541	76439	74816	35	5
Sicilia	29240	2392414	1183795	155404	54890	176288	174805	500	162
Sardegna	24250	588064	296024	32219	10253	43177	40924	16	9
Regno d'Italia . .	259320	21777334	10897236	2623605	1260640	1494564	1465127	3336	2454

Annuario dell'Istruzione pubblica del Regno d'Italia pel 1864-65

Trovare il numero delle donne di ciascun compartimento, il numero degli abitanti maschi e femmine sopra i 5 anni, il numero degli abitanti sopra i 5 anni che sanno leggere e scrivere, e fare di questi risultati un quadro statistico.

Scrivere i 14 compartimenti in ordine della maggior popolazione rispettiva, e trovare le differenze successive delle popolazioni così ordinate.

25. Rappresento colla lettera a un numero qualunque e con b un altro numero che potrebbe anch'essere eguale a quello rappresentato da a; qual è la somma di questi due numeri?

Risposta: $a + b$.

Qual è la loro differenza?

$$a - b.$$

Qualunque simbolo o carattere può convenzionalmente rappresentare un numero, il quale può essere dato e noto, oppure può essere qualunque. Le operazioni sui numeri rappresentati con lettere generalmente non si possono fare, ma solo indicare. Un complesso di lettere o di numeri con segni indicanti operazioni aritmetiche dicesi *espressione*, la quale è *aritmetica* se non contiene che numeri, *algebrica* se contiene lettere.

La somma $a+b$ e la differenza $a-b$ sono espressioni. L'espressione

$$a + b - 2c$$

significa che dalla somma $a + b$ bisogna togliere il doppio di c. L'espressione

$$a - (b - c)$$

significa che dal numero espresso da a bisogna to-

gliere la differenza $b-c$. Il segno che precede una parentesi si riferisce a tutta la quantità inchiusa nella parentesi.

Per trovare il valore numerico di un'espressione, conviene eseguire sui numeri le operazioni indicate dai segni, se è numerica, o, se è algebrica, sostituire alle lettere i loro valori numerici rispettivi, ed eseguire su questi le operazioni indicate.

Supponiamo che a valga 10, e b valga 7; il valore numerico di $a+b$ sarà 17, e di $a-b$ 3. Supponiamo ancora $a=19$, $b=20$, $c=8$, sarà

$$a-(b-c)=19-(20-8)=19-12=7.$$

La somma delle due quantità $a+b$, e $a-b$ vale $2a$, e la loro differenza vale $2b$, qualunque siano i numeri a e b.

Trovare il valore delle tre espressioni seguenti:

$$5a-3b+2c,$$
$$a+2b-(2a-c),$$
$$3a+b-25,$$

sapendo che $a=38$, $b=17$, $c=10$.

La differenza di due numeri non cambia aggiungendo ad essi un medesimo numero, oppure togliendo da essi un medesimo numero, il qual principio, che facilmente ognuno può verificare, si esprime con lettere così:

$$a-b=(a+c)-(b+c)=(a-c)-(b-c).$$

§ 6. Moltiplicazione.

26. La moltiplicazione è quell'operazione dell'aritmetica per cui si prende un numero dato tante volte quante unità sono in un altro numero egualmente dato.

Il numero che si prende più volte dicesi *moltiplicando*, l'altro che indica quante volte debbasi il moltiplicando ripetere dicesi *moltiplicatore*. Tutti e due insieme diconsi *fattori*.

Si possono anche moltiplicare fra di loro più di due fattori, nel qual caso si dovrà prendere il primo fattore tante volte quante unità sono nel secondo fattore, poi prendere il risultato che si ottiene da questa prima moltiplicazione tante volte quante unità sono nel terzo fattore, poi prendere quest'ultimo risultato ottenuto tante volte quante unità sono nel quarto fattore, e così di seguito.

Il risultato della moltiplicazione di due o più fattori dicesi *prodotto*.

In ogni moltiplicazione il prodotto è sempre un numero omogeneo col moltiplicando, non essendo altro che il moltiplicando ripetuto tante volte quante unità sono nel moltiplicatore.

Il moltiplicando può essere un numero astratto o concreto; il moltiplicatore suolsi riguardare come numero astratto, il quale indica quante volte si debba prendere il moltiplicando, ma, accoppiato al moltiplicando, diventa un numero concreto, nel quale l'oggetto rappresentato è lo stesso moltiplicando. Così se una merce costa sette lire ciascun metro, il prezzo

di tre metri si otterrà moltiplicando sette lire per tre unità astratte, e non per tre metri; ma possiamo anche dire che quel prezzo vale tre volte sette lire, nella quale maniera di esprimere, il tre diviene numero concreto, ciascuna sua unità rappresentando sette lire.

Risulta dalla definizione data che il prodotto si compone col moltiplicando, come il moltiplicatore coll'unità. Invero il prodotto si compone col moltiplicando ripetuto tante volte quante sono le unità del moltiplicatore; e questo si compone coll' unità ripetuta lo stesso numero di volte. Quindi suolsi anche definire la moltiplicazione quella operazione per cui, dati due numeri, se ne cerca un terzo che sia formato col primo, come il secondo è formato coll' unità.

Dalle cose dette apparisce che la moltiplicazione è un caso speciale dell'addizione. Infatti per prendere un numero tante volte quante sono le unità contenute in un altro, basta scriverlo altrettante volte di seguito, e poi fare la somma.

27. Per far meglio comprendere la regola della moltiplicazione distinguerò più casi.

1º *Caso. Moltiplicazione di un numero di una cifra per un altro pure di una cifra sola*, come sarebbe 4 per 5 o 4×5. In questo caso la moltiplicazione si deve saper fare a mente. Avvertano i giovani di esercitarsi bene a dire prontamente il risultato di questo caso della moltiplicazione senza ricorrere alla così detta *tavola pitagorica*, o a certe regole materiali che si sogliono dare, le quali sono più di nocumento che di vantaggio ai principianti. Darò qui nondimeno la nominata tavola, estesa fino al 12, alla quale i giovani studiosi procureranno di ricorrere solo nei

casi in cui si tratta di verificare i risultati già prima ottenuti mentalmente.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

Componesi questa tavola di caselle 144, formanti 12 linee orizzontali ed altrettante colonne verticali. In ciascuna linea e colonna vedesi facilmente quale progressione formino i numeri contenuti. Vogliasi, per es., trovare il prodotto di 7 per 8; si cercherà il 7 nella linea superiore orizzontale, e l'8 nella colonna verticale a sinistra. Ponendo un dito su ciascuno dei due numeri trovati, si farà scorrere verticalmente in giù il dito corrispondente al 7, arrestandolo all'altezza della linea orizzontale, su cui sta l'8. Il numero

56, su cui si troverà allora il dito, è il prodotto cercato. Lo stesso si fa per qualunque altro esempio.

I giovani principianti possono esercitarsi utilmente in questo caso della moltiplicazione, scrivendo più volte da se stessi, e senza aiuto di libri o di persone, una tavola quale è accennata nel seguente schema:

$1\times1=1$, $2\times1=2$, $3\times1=3$,..... $12\times1=12$;
$1\times2=2$, $2\times2=4$, $3\times2=6$,..... $12\times2=24$;
$1\times3=3$, $2\times3=6$, $3\times3=9$,..... $12\times3=36$;
. . . .
$1\times12=12$, $2\times12=24$,......... $12\times12=144$.

2° *Caso. Moltiplicazione di un numero qualunque per un numero di una sola cifra.* Sia da moltiplicare 3451 per 7. Ciò vuol dire che bisogna sommare 7 numeri eguali a 3451, ossia che bisogna prendere questo numero 7 volte. Conseguiremo lo scopo prendendo 7 volte le unità de' singoli ordini, nelle quali (16) si può scomporre il 3451, cosicchè il prodotto sarà eguale a

1×7, ossia 7 unità
$+5 \times 7$, ossia 35 decine
$+4 \times 7$, ossia 28 centinaia
$+3 \times 7$, ossia 21 migliaia;

e ragionando come nell'addizione (17), cioè osservando che 35 decine fanno 5 decine più 3 centinaia, le quali tre centinaia unite alle 28 dànno centinaia 31, equivalenti ad 1 centinaio più 3 migliaia, si scorgerà che il prodotto cercato vale

7 unità $+$ 5 decine $+$ 1 centinaio $+$ 24 migliaia, ossia vale 24157.

Dal fatto ragionamento è facile dedurre la seguente regola.

Per moltiplicare un numero qualunque per un numero di una cifra si scrive il moltiplicando, e sotto di esso il moltiplicatore, tirando una linea sotto di questo per separarlo dal prodotto. Si moltiplicano le unità di ciascun ordine del moltiplicando pel moltiplicatore, cominciando da destra e andando verso sinistra, e i prodotti parziali che si ottengono, se non sono maggiori di 9, si scrivono sotto la linea nella colonna di quella cifra del moltiplicando, dalla quale questi prodotti provengono; se poi sono maggiori, si scompongono in decine ed unità; si scrivono sotto la linea le unità nella colonna corrispondente, e si ritengono le decine per aggiungerle, come altrettanti *uni*, al prodotto parziale seguente verso sinistra.

Esempio. Sia da moltiplicare il numero 70972 per 6. L'operazione si disporrà e si farà come segue:

$$\begin{array}{r} 70972 \\ 6 \\ \hline 425832 \end{array}$$

si dirà 6 per 2 *dodici*, si scrive 2 e si ritiene 1; 6 per 7 *quarantadue* e uno ritenuto 43, si scrive 3 e si ritengono 4; 6 per 9 *cinquantaquattro* e 4 ritenuti 58, si scrive 8 e si ritengono 5; 6 per 0 *zero*, si scrivono i 5 ritenuti; 6 per 7 *quarantadue;* questo essendo l'ultimo prodotto parziale, si scrive intiero sotto la linea.

Più brevemente, la ragione di questa regola sta in ciò che, ripetendo successivamente tutte le parti del moltiplicando tante volte quante sono le unità del moltiplicatore, e sommando i prodotti parziali ottenuti, il risultato a cui si arriva è precisamente tutto il moltiplicando ripetuto tante volte quante unità sono nel moltiplicatore.

Ecco alcuni esempi:

3451	701009	155078	107001
7	8	5	9
24157	5608072	775390	963009

3° *Caso. Moltiplicazione di un numero qualunque per un numero qualunque.* In questo caso si dispongono i due fattori come nel caso precedente, poi cominciando da destra, si moltiplica successivamente tutto il moltiplicando per ciascuna cifra significativa del moltiplicatore, e i risultati parziali che si ottengono, si scrivono gli uni sotto gli altri in modo che la prima cifra a destra di ciascun risultato si trovi nella colonna di quella cifra del moltiplicatore, da cui è provenuto questo risultato. Sommando poscia i prodotti parziali così disposti, si avrà dalla somma loro il prodotto cercato.

Esempio. Sia da moltiplicare il numero 9107 per 6052. L'operazione si dispone e si fa come segue:

```
    9107
    6052
--------
   18214
  45535
54642
--------
55115564
```

si moltiplica prima il 9107 per 2, e si trova il prodotto parziale 18214; poscia per 5, e si ottiene 45535; finalmente per 6, e si avrà 54642. Come si vede, la cifra a destra di ciascun prodotto parziale è scritta sotto quella cifra del moltiplicatore che l'ha generata. La somma 55115564 di questi prodotti parziali costituisce il prodotto cercato di 9107 per 6052.

.a **ragione** della regola data sta in ciò che, se **mponiamo** il moltiplicatore nelle sue unità dei dif-**enti ordini**, e moltiplichiamo successivamente il **ıltiplicando** per le singole parti del moltiplicatore, la **mma dei** prodotti parziali che così si ottengono sarà **identemente** il prodotto cercato. Ora ripetendo tante ılte il moltiplicando quante unità semplici sono nel oltiplicatore, si ottiene un primo prodotto parziale, ıe è di unità semplici; onde la sua prima cifra a estra deve scriversi nella colonna delle unità semplici. ipetendo poi tante volte il moltiplicando quante sono e decine del moltiplicatore, il prodotto parziale che i otterrà sarà di decine. In vero il numero delle decine lel moltiplicatore corrisponde ad un numero decuplo di unità semplici; onde il moltiplicando non devesi solo ripetere tante volte quante sono le decine del moltiplicatore ma un numero decuplo di volte, e perciò il prodotto del moltiplicando per le decine del moltiplicatore rappresenta decine, e l'ultima sua cifra a destra deve scriversi nella colonna delle decine. Si ripeta lo stesso ragionamento per le centinaia, migliaia, ecc., del moltiplicatore, e sarà compita la dimostrazione.

Notisi bene che la regola dice di moltiplicare il moltiplicando per ciascuna cifra *significativa* del moltiplicatore, il che significa che gli zeri del moltiplicatore posti tra cifre significative si saltano, badando però di scrivere sempre al posto indicato dalla regola la prima cifra a destra di ciascun prodotto parziale.

28. Nel caso in cui i fattori terminano amendue, od anche un solo, a destra con cifre *zero*, queste si potranno, nell'eseguire la moltiplicazione, trascurare, e si scriveranno a destra del prodotto che si

otterrà tanti zeri, quanti furono quelli trascurati a destra di ambi i fattori.

Così sia da moltiplicare 2900 per 31000; trovo il prodotto di 29 per 31, che è 899, vi aggiungo a destra cinque zeri (chè tanti sono ne' due fattori), e ottengo il prodotto cercato, che è 89900000.

In vero il moltiplicando è 29 centinaia. Ripetendo questo tante volte quante unità sono nel moltiplicatore, si avrà un prodotto di centinaia, e per ridurlo in unità, bisognerà aggiungervi due zeri a destra (13). Dunque si possono trascurare gli zeri del moltiplicando, purchè i medesimi si scrivano poi a destra del prodotto che si sarà trovato.

Egualmente il moltiplicatore è, nell'esempio arrecato, 31 migliaio: ripetendo il moltiplicando 31 volta, avrò un prodotto che rappresenterà migliaia, poichè in realtà il moltiplicando doveva ripetersi mille volte di più. Onde, per ridurre tale prodotto in unità, bisognerà scrivergli a destra tre zeri. Dunque si possono anche trascurare gli zeri a destra del moltiplicatore, purchè i medesimi si scrivano poi a destra del prodotto che si sarà trovato.

29. Importa notare che qualunque sia l'ordine con cui si moltiplicano due o più fattori, il loro prodotto non varia. Infatti sia da moltiplicare, per esempio, 4 per 7 (ciò che dico di questi numeri si può ripetere per qualunque altro esempio); dico che tanto fa moltiplicare il quattro per sette, come il sette per quattro, ossia tanto fa prendere sette volte il quattro, come prendere quattro volte il sette. Ed in vero, scriviamo sette unità per linea su quattro linee consecutive, come si vede nel quadro seguente:

1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1

La somma di queste unità fa evidentemente 4 volte 7, ossia il prodotto cercato di 7 per 4, essendo il quadro composto di 4 linee orizzontali di 7 unità ciascuna.

Ma il quadro stesso si compone pure di 7 colonne verticali di quattro unità ciascuna; dunque la somma delle unità del quadro rappresenta pure il prodotto di 4 per 7, il quale è perciò eguale a quello di 7 per 4.

È facile estendere questa dimostrazione al caso di più di due fattori. Per ciò conseguire, comincio a dimostrare che in una serie qualunque di fattori si possono sempre alternare fra di loro i due ultimi senza cambiare il prodotto. Sia, per esempio, il prodotto $9 \times 7 \times 5 \times 3$; dico ch'esso è eguale al prodotto $9 \times 7 \times 3 \times 5$. Infatti per eseguire l'operazione indicata nel primo prodotto, conviene da prima moltiplicare 9 per 7, il che dà 63; quindi il 63 per 5, ed il prodotto, che ne nasce, per 3. Ora, 63 moltiplicato per 5 vale 5 volte 63, ossia $63+63+63+63+63$. Per compiere l'operazione, questa somma dovrà ripetersi 3 volte; cosicchè il prodotto cercato sarà dato dalla somma

$$\begin{array}{r} 63+63+63+63+63 \\ +63+63+63+63+63 \\ +63+63+63+63+63 \end{array}$$

che vale tre volte cinque volte 63. Ma osservando che in questo quadro vi sono cinque colonne verticali contenenti ciascuna tre volte 63, si scorgerà

tosto che tre volte cinque volte 63 è eguale a cinqu volte tre volte 63, ossia che $63\times5\times3=63\times3\times5$ Dunque, ecc.

Ciò premesso è facile far vedere che, senza cambiare il prodotto di $9\times7\times5\times3$, si può far passare qualunque fattore di esso in qualunque posizione da destra a sinistra, o da sinistra a destra. Invero è già dimostrato che $9\times7\times5\times3$ vale $9\times7\times3\times5$. Ora quest'ultima quantità vale il prodotto di $9\times7\times3$ per 5; e, per la dimostrazione data, $9\times7\times3$ vale $9\times3\times7$: dunque sarà $9\times7\times5\times3=9\times3\times7\times5$. Finalmente, essendo $9\times3=3\times9$, si avrà ancora il prodotto dato eguale a $3\times9\times7\times5$. Dunque un fattore qualunque si può trasportare da destra a sinistra in una posizione qualunque. La stessa cosa si può fare da sinistra a destra, poichè essendo $9\times7=7\times9$, sarà $9\times7\times5\times3=7\times9\times5\times3$: essendo poi $7\times9\times5=7\times5\times9$, sarà pure $9\times7\times5\times3=7\times5\times9\times3$; e finalmente, alternando i due ultimi fattori, $9\times7\times5\times3=7\times5\times3\times9$. Dunque, alternando comunque i fattori di un prodotto, questo punto non cambia.

30. Ecco alcune conseguenze della proposizione dimostrata:

1° Dovendo moltiplicare tra di loro due numeri, converrà scegliere per moltiplicatore quello che avrà un minor numero di cifre significative onde aver da fare un minor numero di prodotti parziali.

2° Moltiplicando uno de' fattori di un prodotto per un numero, tutto il prodotto viene moltiplicato per lo stesso numero. Così per moltiplicare il prodotto 5×6 per 7, basterà moltiplicare il solo fattore 5, ovvero il solo fattore 6 per 7, cosicchè sarà il prodotto cercato eguale a 35×6, ovvero a 5×42.

fa il principio, qualunque sia il numero de' fattori del prodotto.

3º Per verificare se la moltiplicazione è ben fatta, si può ripetere l'operazione scambiando l'ordine dei fattori. Vedremo nel paragrafo seguente altre prove della moltiplicazione.

4º Per moltiplicare un numero pel prodotto di più fattori, basta moltiplicare successivamente il numero pei singoli fattori. Sia, per esempio, da moltiplicare il numero 37 per 42. Osservando che il 42 è il prodotto di 6 per 7, si moltiplicherà il 37 per 6, ed il prodotto ottenuto per 7, e si otterrà il prodotto finale 1554. Si risparmia in questo modo l'addizione de' prodotti parziali otteuuti coll'applicazione della regola generale, e si abbrevia d'alcun poco l'operazione.

Si può pure applicare questo modo di moltiplicazione anche quando il moltiplicatore non sia decomponibile in fattori, come nell'esempio seguente: 137×73. Invece di moltiplicare per 73, si può moltiplicare per $72+1$, ossia prendere 72 volte il 137, ed al prodotto aggiungere una volta 137, cosicchè si avrà

$$137\times73=137\times72+137=137\times8\times9+137.$$

31. *Il numero delle cifre del prodotto di due fattori* è uguale alla somma dei numeri delle cifre di questi, oppure eguale a questa somma diminuita di un'unità. Infatti qualunque sia il moltiplicando, supponiamo che il moltiplicatore abbia quattro cifre, e sia, per esempio, 8932.

Questo numero è compreso tra 1000 e 10000; dunque il prodotto cercato sarà maggiore del prodotto del moltiplicando per 1000, e minore del prodotto del moltiplicando per 10000. Ma questi due prodotti si ottengono rispettivamente scrivendo a

destra del moltiplicando tre e quattro zeri, e però il numero delle cifre del primo vale la somma de' numeri delle cifre de' due fattori dati, meno una ed il numero delle cifre del secondo vale la somma de' numeri delle cifre de' due fattori dati. Dunque, ecc.

Nei casi pratici dalla considerazione delle prime cifre de' fattori dati si può tosto dedurre il vero numero delle cifre del prodotto.

32. *Potenze; esponenti.* Chiamasi *potenza* di un numero il prodotto che nasce dalla moltiplicazione del numero stesso preso due o più volte come fattore. Ogni numero è *prima potenza* di se stesso. Dicesi poi *seconda potenza*, od anche *quadrato*, di un numero il prodotto del numero per se stesso moltiplicato, ossia il prodotto che nasce dal numero preso due volte come fattore. *Terza potenza* o *cubo* di un numero è il prodotto d'un numero moltiplicato due volte per se stesso, ossia il prodotto che nasce dal numero preso tre volte come fattore. In generale dicesi *quarta, quinta, sesta,* ecc., *potenza* di un numero il prodotto che proviene dal numero stesso preso quattro, cinque, sei, ecc., volte come fattore.

Così, ad esempio, la 1ª potenza di 5 è 5, la 2ª potenza od il quadrato di 5 è $5 \times 5 = 25$; la 3ª potenza od il cubo di 5 è $5 \times 5 \times 5 = 125$; la quarta potenza di 5 è $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$, e così di seguito.

La potenza di una quantità s'indica con un numero scritto alla destra della quantità un po' alto, e detto *esponente.* Così la quarta potenza di 5 si scrive 5^4, e si legge *cinque alla quarta potenza*, o *cinque all'esponente quattro*, od anche *cinque elevato quattro*. Così sarà $2^3 = 8$; $3^2 = 9$; $4^3 = 64$; $3^4 = 81$; ecc.

L'esponente si può definire il numero che indica

quante volte debbasi prendere per fattore la quantità che ne è affetta.

In generale, qualunque siano i numeri a e m, l'espressione a^m significa la m^{esima} potenza del numero a.

Risulta dai principii del num. 30 che $13^2 \times 13^3 = 13^5$, $2^4 \times 2^7 = 2^{11}$, e in generale $a^m \times a^n = a^{m+n}$. Infatti $13^2 \times 13^3 = 13 \times 13 \times 13 \times 13 \times 13 = 13^5$, ecc.

33. *Radice quadrata*. Chiamasi radice quadrata di un numero la quantità che elevata al quadrato fa il numero dato. Quindi il quadrato della radice quadrata di un numero fa il numero stesso. La radice quadrata si indica col segno $\sqrt{\ }$ così il simbolo $\sqrt{25}$ esprime la radice quadrata di 25, e vale quanto 5, giacchè 5 al quadrato fa 25.

34. Se si avesse da moltiplicare per un numero qualunque la somma indicata di più numeri, senza eseguire questa somma, si potrebbe ottenere il risultato colla moltiplicazione *per parte*, moltiplicando cioè separatamente ciascuna parte della somma indicata pel moltiplicatore, e sommando i prodotti parziali. Così sia da moltiplicare $5+4+20$ per 7; invece di eseguire la somma 29 dei tre primi numeri e moltiplicarla per 7, il che darebbe 203, moltiplico separatamente 5 per 7; 4 per 7; 20 per 7, e sommo i prodotti, cosicchè sarà

$$(5+4+20) \times 7 = 5 \times 7 + 4 \times 7 + 20 \times 7$$
$$= 35 + 28 + 140 = 203.$$

Se fossero due somme indicate da moltiplicare l'una per l'altra, come $(8+5) \times (6+11)$, si moltiplicherebbero le singole parti del moltiplicando separatamente e successivamente per le singole parti del moltiplicatore, e si otterrebbe, nell'esempio preso,

$$(8+5) \times (6+11) = 8 \times 6 + 5 \times 6 + 8 \times 11 + 5 \times 11.$$

Digitized by Google

Ripeterò l'osservazione già fatta che le paretesi debbono sempre abbracciare tutte le parti sulle quali cade l'indicazione del segno che precede o segue la parentesi: e vi è differenza grande tra $5+3\times4$ e $(5+3)\times4$, essendo $5+3\times4=5+12=17$, e

$$(5+3)\times4=5\times4+3\times4=32.$$

§ 7. Divisione.

35. La divisione è quella operazione dell'aritmetica per cui si cerca quante volte un numero dato entra in un altro parimente dato. Quest'ultimo numero si chiama *dividendo*, il primo *divisore;* tutti e due insieme si dicono *termini della divisione*. Il risultato che indica quante volte il divisore entra nel dividendo, chiamasi *quoziente* o *quoto*.

36. Egli è chiaro che, se scomponiamo il dividendo in un numero qualunque di parti, e cerchiamo quante volte il divisore è contenuto in ciascuna di esse, la somma de' quozienti che così otteniamo equivale al quoziente cercato, ossia equivale al numero delle volte che il divisore entra nel dividendo dato. Inoltre se un dividendo diviso per un divisore dà un determinato quoziente, lo stesso dividendo moltiplicato per 10, 100, 1000, ecc., e diviso per lo stesso divisore, dà evidentemente un quoto che è 10, 100, 1000, ecc., volte maggiore del quoto primitivo.

Così se si avesse da dividere il 28 per 4, scomponendo il 28 nelle due parti 20 e 8, e osservando che il 4 entra 5 volte in 20 e 2 volte in 8, si conchiuderebbe che lo stesso 4 entra $5+2=7$ volte

in 8. Egualmente se si volesse dividere il numero 28000 per 4, osservando che $28000 = 28 \times 1000$, divido il 28 per 4, e trovato il quoziente 7, moltiplicherò questo per 1000, ed avrò il quoziente cercato, cosicchè sarà $28000 \div 4 = 7000$.
Questi due principii uniti a quelli del num. 16 sono sufficienti per guidarci alla regola pratica della divisione di un numero qualunque per un altro.

37. Sia da dividere il numero 639 per 3. Scomposto il dividendo 639 nelle sue unità de' diversi ordini, o meglio nelle parti 600, 30 e 9, e divisa ciascuna parte, secondo i principii del num. precedente, pel divisore 3, si trovano i quozienti rispettivi 200, 10 e 3. Dunque il quoziente cercato è $200 + 10 + 3 = 213$, cosicchè si avrà l'eguaglianza $639 \div 3 = 213$.

Nella pratica il divisore si scrive a destra del dividendo con una linea verticale di separazione in mezzo, ed il quoziente si scrive sotto al divisore con una linea retta di separazione, così:

$$639 \quad \begin{array}{|l} 3 \\ \hline 213 \end{array}$$

Sia ancora da dividere il numero 1953 per 9. Riflettendo sulle operazioni fatte nell'esempio precedente, è facile scorgere che per trovare il quoziente domandato sarà conveniente di scomporre il dividendo 1953 in più gruppi di unità degli ordini successivi, e tali che ciascuno di essi sia divisibile esattamente per 9, la qual cosa agevolmente saprà conseguire chiunque sappia bene a memoria la tavola pitagorica e ritenga i principii del numero 16. Nell'esempio attuale io scompongo il 1953 in 18 cen-

tinaia, 9 decine e 63 unità. Dividendo separatamente per 9 queste tre parti, si trovano i quozienti rispettivi: 2 centinaia, 1 decina, 7 unità, componenti il quoziente totale 217. Nella pratica il presente esempio si disporrebbe e si risolverebbe come segue

```
1953  | 9
18    |----
----    217
 15
  9
----
 63
 63
----
  0
```

Scritto il divisore a destra del dividendo, si osserva che le unità d'ordine più elevato del dividendo capaci di contenere il divisore sono le centinaia; si dice adunque: il divisore 9 nelle 19 centinaia sta 2 volte per 18 e si scrive 2 al quoziente, la quale cifra rappresenterà le centinaia. Sottratto il prodotto 18 di due per 9 dalle 19 centinaia del dividendo, si trova per resto 1 centinaio ossia 10 decine. Allora si abbassa la cifra 5 delle decine del dividendo a destra del resto 1, e si ottiene un nuovo dividendo parziale di 15 decine. Il divisore 9 in 15 sta una volta per 9, e perciò si scrive 1 al quoziente al sito delle decine. Sottratto il 9 da 15 decine, si ottiene il resto di 6 decine, o 60 unità, alle quali si aggiungono le 3 unità del dividendo per formare l'ultimo dividendo parziale 63 unità. Il 9 in 63 sta 7 volte, e si scrive perciò la cifra 7 al posto delle unità del quoziente. Il prodotto 63 del 7 per 9 sottratto dall'ultimo dividendo parziale dà per resto zero. Dunque l'operazione è finita, ed il quoziente cercato è 217.

Digitized by Google

Questo modo di procedere è generale e serve per qualunque caso della divisione dei numeri intieri. Quindi si ricava la seguente regola per fare la divisione di un numero per un altro.

Si scrive il divisore a destra del dividendo, e sotto al divisore si scriveranno le cifre del quoziente. Due rette servono a separare il divisore dal quoziente e dal dividendo; si prendono a sinistra del dividendo tante cifre quante bastano per formare un numero capace di contenere il divisore. Quelle cifre formeranno il primo dividendo parziale, il quale ha tante cifre quante ne ha il divisore, o una di più. Si cerca quante volte il divisore entra nel primo dividendo parziale, e questo numero di volte, il quale non può mai eccedere il 9, dà la prima cifra del quoziente, quella cioè che rappresenta le unità dell'ordine più elevato del quoziente. Moltiplicato allora il divisore per la cifra trovata al quoziente, si scrive il prodotto sotto al primo dividendo parziale, per farne poscia la sottrazione. A destra del resto si abbassa la cifra del dividendo la quale sta a destra del primo dividendo parziale, si ottiene così un secondo dividendo parziale. Si cerca allora quante volte questo contenga il divisore, e il numero delle volte formerà la seconda cifra del quoziente. Moltiplicato il divisore per questa seconda cifra, si sottrae il prodotto dal secondo dividendo parziale. Accanto al resto che si ottiene si abbassa la cifra del dividendo che sta a destra dell' ultima abbassata, e si forma un terzo dividendo parziale. Si cerca allora quante volte il divisore sta in esso, e si continua l'operazione sempre allo stesso modo finchè siansi abbassate successivamente tutte le cifre del dividendo.

Esempio. Sia da dividere il numero 14706 per 9. L'operazione si dispone e si fa come segue:

```
14706    | 9
9        |----
--         1634
 57
 54
 --
  30
  27
  --
   36
   36
   --
    0
```

Scritti il dividendo e il divisore come si vede, si cerca quante volte il 9 è contenuto nel 14 formato dalle due cifre a sinistra del dividendo, e si dice: 9 in 14 sta 1 volta; scrivo 1 al quoziente. Moltiplico 1 per 9, che dà 9, e lo scrivo sotto il 14, dal quale lo sottraggo, e ottengo 5; a destra del 5 abbasso la cifra 7 del dividendo, e ottengo 57. Il 9 in 57 sta 6 volte; scrivo 6 al quoziente; 6 per 9 dà 54, scrivo 54 sotto al 57, sottraggo, e resta 3, a destra della quale cifra scrivo lo *zero* del dividendo. Il 9 nel 30 sta 3 volte; scrivo 3 al quoziente; 3 per 9 da 27, scrivo 27 sotto il 30, sottraggo, e trovo il resto 3, accanto al quale scrivo l'ultima cifra 6 del dividendo. Il 36 contiene 4 volte il 9, scrivo 4 al quoziente; moltiplico 4 per 9, ottengo 36, il quale sottratto da 36 dando zero di resto, e non avendo più cifre da abbassare al dividendo, la divisione è finita. Quindi il 9 sta 1634 volte nel 14706.

L'operazione eseguita su questo esempio equivale all'avere decomposto il dividendo 14706 nelle parti 9 migliaia, 54 centinaia, 27 decine e 36 unità, i

Digitized by Google

quienti delle quali parti sono rispettivamente 1 miglio, 6 centinaia, 3 decine e 4 unità.

ve il dividendo terminasse con zeri, si opera su qsti come sulle altre cifre; ma quando si giunge ad un resto zero prima che siano abbassati tutti g zeri del dividendo, basterebbe scrivere a destra dla parte del quoziente, già trovata, gli zeri che stano da abbassarsi a destra del dividendo. Questo so avviene, per esempio, nel numero 30000 da didere per 5. Dividendo il 30 per 5, si trova il quoente 6, a destra del quale si scrivono i tre zeri che estano nel dividendo, e si ha il quoziente cercato 6000.

Negli esempi finora trattati, e in tutti i casi somiglianti, in cui il divisore ha una sola cifra, non è necessario di scrivere sotto ai dividendi parziali i prodotti successivi delle cifre del quoziente pel divisore. È meglio fare queste operazioni a mente, come nel seguente esempio:

37242	6
	6207

Si ragiona così: il 6 nel 37 sta 6 volte (ed in così dire si scrive il 6 al quoziente) per 36, coll'avanzo di 1 che col 2 che segue fa 12. Il 6 nel 12 sta due volte (si scrive al quoziente 2) coll'avanzo di niente. Il 6 nel 4 sta zero volte (si scrive zero al quoziente) coll'avanzo di 4, che col 2 seguente fa 42. Il 6 nel 42 sta 7 volte. Scritto il 7 al quoziente l'operazione è finita.

Coloro che sono esercitati eseguiscono la divisione a questo modo anche allorquando il divisore è 11, 12, 25 o qualche altro numero, i cui multipli si tengono facilmente a memoria.

Se, dopo di aver abbassato a destra di uno dei resti la cifra corrispondente del dividendo, si ottiene

un numero che non contenga il divisore, si scriverà *zero* al quoziente, e si abbasserà a destra della fra già abbassata la cifra seguente del dividendo, con si vedrà nell'esempio che segue:

```
1840168   | 8
16          230021
 24
 24
  0016
    16
     08
      8
      0
```

Se il divisore ha più di una cifra, non soffre eccezione la regola enunciata; solo allora si trova con minore facilità il numero delle volte che il divisore è contenuto ne' singoli dividendi parziali. Del resto l'operazione seguente chiarisce pienamente la via da seguirsi. Vogliasi dividere il numero 513758224 per 65008. Si dispongono i termini e si fa l'operazione come segue:

```
513758224   | 65008
455056        7903
 587022
 585072
   195024
   195024
        0
```

Si prendono a sinistra del dividendo tante cifre quante sono sufficienti per formare un numero che contenga il divisore. Nel nostro caso occorrono sei cifre formanti il numero 513758. Per cercare quante

Google

volte il divisore entri in questo primo dividendo parziale, si dice così: il 6 (prima cifra del divisore) nel 51 (prime cifre del dividendo) sta 8 volte per 48 coll'avanzo di 3, che col 3 che viene a destra nel dividendo fa 33. Il 5 (seconda cifra del divisore) nel 33 non entra 8 volte. Dunque porremo che il 6 (prima cifra del divisore) stia solo 7 volte nel 51 per 42, coll'avanzo di 9. Il 9 col 3 che vien dopo fa 93. Il 5 (seconda cifra del divisore) nel 93 sta anche 7 volte, coll'avanzo di tanto che il resto del divisore sta sicuro più di 7 volte nel resto del dividendo. Scrivo pertanto il 7 al quoziente, moltiplico il divisore per 7, scrivo il prodotto 455056 sotto al primo dividendo parziale che era 513758 e sottraggo. Accanto al resto 58702 abbasso la cifra 2 che viene a destra delle cifre già prese nel dividendo. Ottengo così il secondo dividendo parziale 587022, e dico: il 6 (prima cifra del divisore) nel 58 entra 9 volte per 54 coll'avanzo di 4, che colla cifra 7 seguente a destra nel secondo dividendo parziale fa 47. Il 5 (seconda cifra del divisore) nel 47 sta pure 9 volte coll'avanzo di due che colle cifre 022 che vengono dopo nel dividendo parziale fa 2022, nel quale numero il resto del divisore, che è 8, entra sicuramente 9 volte; scrivo adunque il 9 al quoziente. Moltiplico il divisore per 9 e scrivo il prodotto 585072 sotto al 2° dividendo parziale; sottraggo e accanto al resto 1950 abbasso la cifra 2, che si trova a destra di quelle già prese nel dividendo. Il divisore non entrando nel numero risultante 19502, scrivo 0 al quoziente e abbasso la cifra seguente 4 (ultima) del dividendo. Ottengo così il nuovo dividendo parziale 195024, che bisogna dividere pel divisore 65008. Perciò dico: il 6 (prima cifra del divisore) nel 19 entra 3 volte per 18 coll'avanzo di 1, che col 5, che vien

dopo al 19, fa 15. Il 5 (seconda cifra del divisore) nel 15 sta pure 3 volte, scrivo 3 al quoziente; il prodotto del divisore per 3 sottratto dall'ultimo dividendo parziale dando *zero* per resto, e non avendo più cifre da abbassare al dividendo, la divisione è finita. Il quoziente è 7903; dunque il dividendo 513758224 contiene 7903 volte il divisore 65008.

Colla operazione fatta nell'esempio che precede si è scomposto il dividendo 513758224 nelle seguenti parti 455056000, 58507200, 195024, le quali sommate riproducono il dividendo. Ora la prima parte contiene il divisore 7000 volte, la seconda 900 volte, la terza 3 volte; dunque il divisore sta 7903 volte nel dividendo.

Nella pratica coloro che sono già alquanto abituati a questo genere di operazioni, non iscrivono sotto ai dividendi parziali i prodotti delle cifre del quoziente pel divisore, ma fanno mentalmente subito la sottrazione, scrivendo solo i resti, come si dichiara coll'esempio seguente:

11613	237
2133	49
000	

Dopo di aver trovato che il divisore 237 sta 4 volte nel primo dividendo parziale 1161, si scrive 4 al quoziente e si dice così: 4 per 7 dà 28, che dall'ultima cifra 1 del dividendo parziale non si può sottrarre: prendo pertanto dalla cifra 6, delle decine di questo dividendo, 3 decine che coll'1 dànno 31; 31 meno 28 resta 3 che scrivo sotto all'1. Bisogna poi badare che la cifra 6 sarà ridotta a 3. Ora continuando: 4 per 3 dà 12; invece di sottrarre 12 da 3 o da 13 (prendendo un'unità della cifra a si-

nistra), osservo che ottengo lo stesso risultato lasciando il 6 intatto ed accrescendo il 12 di 3 unità, il che dà 15. Dico adunqne 16 meno 15 resta 1, e lo scrivo sotto il 6; e come, operando così, ho dovuto prendere un'unità nella cifra che sta a sinistra del 6, mi ricordo che ne ritengo 1. Finalmente 4 per 2 dà 8, più uno ritenuto fa 9; 11 meno 9 dà 2 che scrivo sotto all'1. Ho così il resto 213, accanto al quale abbasso l'ultima cifra 3 del dividendo. Si troverà tosto la seconda cifra 9 del quoziente ed il resto zero, operando come sopra.

Nel caso in cui il dividendo ha molte cifre di più che il divisore, e specialmente nel caso in cui si debbono dividere più numeri per uno stesso divisore, si facilita la ricerca delle cifre del quoziente e si abbrevia l'operazione facendo i prodotti del divisore pe' numeri 1, 2, 3, ecc., fino a nove, e tenendoli in ordine sotto gli occhi nel mentre che si fa la divisione. Ecco il modo:

Dividendo	Divisore
422006576	73
365	5780912
570	
511	
590	
584	
665	
657	
87	
73	
146	
146	
0	

Tavola dei prodotti del divisore

73	per	1	73
»	»	2	146
»	»	3	219
»	»	4	292
»	»	5	365
»	»	6	438
»	»	7	511
»	»	8	584
»	»	9	657

Digitized by Google

La divisione si fa al modo ordinario; la sola differenza sta nel trovare il numero delle volte che ciascun dividendo parziale contiene il divisore; e questo numero di volte si vede ad occhio sulla tavola de' prodotti di 73 per 1, 2, 3, ecc., che sta accanto alla tavola delle operazioni.

38. Può darsi che il divisore non entri un numero intiero di volte nel dividendo: allora, sottratto il prodotto del divisore per l'ultima cifra del quoziente dall'ultimo dividendo parziale, vi sarà un resto differente da zero; tale resto dovrebbe ancora dividersi pel divisore, ma essendo minore di questo, la divisione non può effettuarsi. Vedremo più tardi il modo di completare il quoziente anche in questo caso, nel quale la divisione dicesi, ed è, impossibile *in intieri*, il che torna a dire che il dividendo non è moltiplo del divisore.

39. Come la moltiplicazione dei numeri intieri può coll'addizione eseguirsi, così può la divisione farsi col mezzo della sottrazione, sottraendo cioè tante volte di seguito dal dividendo il divisore, finchè si arrivi ad un resto nullo o minore del divisore. Il numero delle sottrazioni che si possono fare è uguale al quoziente cercato.

40. Indicando il quoziente quante volte il divisore è contenuto nel dividendo, egli è chiaro che il divisore ripetuto tante volte, quante unità sono contenute nel quoziente, deve riprodurre il dividendo. Viceversa, il dividendo potendosi riguardare come il prodotto del divisore pel quoziente, ne segue che, dividendo il prodotto di due fattori per uno di questi, il quoziente sarà eguale all'altro fattore.

Egli è per ciò che suolsi anche definire la divi-

sione per quell'operazione nella quale, dato un prodotto ed uno de'suoi fattori, si cerca l'altro fattore. Da questi principii nasce il modo di verificare se la moltiplicazione sia ben fatta: si divida il prodotto per uno dei due fattori (moltiplicando o moltiplicatore), il quoziente dovrà essere eguale all'altro fattore. Per verificare poi la divisione, si moltiplichi il quoziente pel divisore, si aggiunga al prodotto il resto, se esiste (38), e ciò che ne risulta deve dare il dividendo.

Si può anche fare la prova della divisione nel modo seguente. Sommate le linee alterne de'numeri quali stanno nell'operazione e la somma dovrà essere eguale al dividendo. Così nell'ultimo esempio del numero 37 si dovrebbero sommare i numeri 365, 511, 584, 657, 73, 146 ritenendo le cifre nelle colonne in cui esse naturalmente trovansi, ossia supponendo questi numeri completati con zeri fino alla colonna delle unità semplici. Se vi ha resto, devesi aggiungere alla somma predetta. Questa prova è uguale alla precedente; solo è presentata sotto un nuovo aspetto.

41. La divisione ha talvolta per oggetto di fare di un numero dato (dividendo) tante parti eguali quante unità sono in un altro numero dato (divisore). Si ottiene appunto questo scopo col cercare quante volte il divisore entri nel dividendo.

42. Ad ogni cifra del dividendo, abbassata a destra de'resti successivi, corrispondendo una cifra al quoziente, si può conoscere *a priori* il numero delle cifre di questo in ogni divisione. Così nella divisione di 422006576 per 73 il primo dividendo parziale 422 dà una cifra al quoziente, e ciascuna delle sei cifre del dividendo le quali seguono il 422 ne

daranno pure una; dunque il quoziente avrà sette cifre, come in realtà si è trovato nell'ultimo esempio del numero 37.

43. I resti successivi nella divisione non debbono mai essere maggiori nè eguali al divisore; se ciò avvenisse, sarebbe segno di commesso sbaglio.

44. Riguardando la divisione come operazione nella quale, dato un prodotto ed un fattore, si cerca l'altro fattore, e ricordando che nella moltiplicazione il prodotto è sempre della natura del moltiplicando, si scorge facilmente che, ove il dividendo e il divisore siano di natura differente, il quoziente sarà della natura del dividendo, dovendo essere il prodotto della natura di uno de'suoi fattori.

Se poi il dividendo e il divisore sono omogenei, allora la natura del quoziente non si può conoscere che dall'enunciato della questione che conduce a simile divisione.

45. Dividendo uno de'fattori di un prodotto per un numero, tutto il prodotto viene diviso per questo numero. Ciò risulta abbastanza chiaro dai principii relativi alla moltiplicazione, stabiliti nel num. 30.

Quindi, se si moltiplica un fattore di un prodotto per un numero, e si divide un altro fattore per lo stesso numero, il prodotto non cambia. Di qui nasce un modo di semplificare in alcuni casi la moltiplicazione, o anche di verificare se sia ben fatta. Si semplifica, per esempio, nel caso seguente, moltiplicando il primo fattore per quattro, e dividendo il secondo per quattro: $25 \times 84 = 100 \times 21 = 2100$. Si verifica poi se una moltiplicazione è stata ben fatta, dividendo uno de'fattori per un numero, per cui si possa dividere esattamente, e moltiplicando l'altro fattore per lo stesso numero; il prodotto de'due nuovi

fattori che si ottengono dev'essere uguale al prodotto prima trovato.

Risulta ancora dallo stesso principio che, per dividere un numero per un divisore che sia composto di due o più fattori, si può dividere il dividendo pel primo di questi fattori; poscia il quoziente trovato pel secondo fattore; il secondo quoziente pel terzo fattore, e così di seguito. L'ultimo quoziente che si troverà sarà il cercato. Sia da dividere 756 per 84; osservo che $84 = 3 \times 4 \times 7$; divido pertanto il 756 per 3, ed ottengo il quoziente 252; divido questo per 4, ed ottengo 63; divido finalmente questo per 7, e si ha pel quoziente finale cercato 9.

46. Segue ancora, da quanto precede, che moltiplicando, oppure dividendo per un medesimo numero i due termini della divisione (dividendo e divisore), il quoziente non viene cambiato. Infatti, riguardando il dividendo come prodotto del divisore pel quoziente, egli è chiaro che quest'ultimo non deve cambiare col moltiplicare il divisore e il dividendo per uno stesso numero, giacchè (30, 2°) moltiplicando il divisore, che è uno de'due fattori, resta moltiplicato per lo stesso numero il prodotto di essi, che è il dividendo.

Egualmente non si altera il quoziente col dividere per uno stesso numero i termini della divisione, poichè (45) dividendo il divisore, che è uno de'fattori, resta diviso per lo stesso numero anche il prodotto, che è il dividendo.

Allo stesso risultato si arriva col seguente ragionamento. Col moltiplicare il dividendo per un numero, il dividendo diverrà tante volte maggiore di quel ch'era prima, quante unità sono nel nu-

mero per cui esso si è moltiplicato; in conseguenza egli conterrà altrettante volte di più che prima il divisore, cosicchè il quoziente resta moltiplicato per lo stesso numero per cui si è moltiplicato il dividendo. Col moltiplicare poi il divisore, questo si rende tante volte più grande quante unità sono nel numero per cui si moltiplica, onde il divisore sarà contenuto altrettante volte di meno che prima nel dividendo, cosicchè il quoziente resta diviso pel numero, per cui si è moltiplicato il divisore. Ora moltiplicando a un tempo il dividendo e il divisore per uno stesso numero, si moltiplica e si divide a un tempo per lo stesso numero il quoziente, per la qual cosa questo non viene alterato.

Con un ragionamento analogo si prova non alterarsi il quoziente col dividere per uno stesso numero il dividendo ed il divisore.

Quindi in molti casi si può abbreviare la divisione col sopprimere qualche fattore comune al divisore e al dividendo. Così dividendo per due i termini della divisione, si trova, per esempio, che il quoziente di 84 diviso per 14 è lo stesso che quello di 42 diviso per 7. Così ancora, se il dividendo ed il divisore terminano ambidue con uno o più zeri, possiamo sopprimere alla loro destra lo stesso numero di zeri senza alterare il quoziente, poichè con questa soppressione dividonsi i due termini della divisione per un medesimo numero (13).

---

§ 8. Esercizi di moltiplicazione e di divisione.

47. Una merce costa 129 lire ciascun metro; si domanda il valore di 1893 metri della stessa merce.
Risposta: 244197.
Un tale pagò lire 54219 per 341 ari di terreno; si domanda quanto gli costò ciascun aro.
Risposta: 159 lire.
Un trabucco piemontese vale sei piedi, un piede dodici once; si domanda quante once facciano cinque trabucchi.
Risposta: 360
Libbre 25 fanno un rubbo; si domanda quanti rubbi facciano 1000 libbre.
Risposta: 40
Il suono impiega un minuto secondo a percorrere nell'aria la distanza di 340 metri; si domanda a che distanza da noi trovisi un pezzo d'artiglieria, sapendo che tra il suo sparo e l'istante dell'arrivo del suo suono a noi passano 7 minuti secondi.
Risposta: 2380 metri.
Quanti scudi di 5 lire bisogna dare per pagare la somma di lire 3572?
Risposta: 714 scudi, più ancora 2 lire.
La circonferenza di una delle ruote di una vettura ha la lunghezza di 382 centimetri, camminando la vettura, quella ruota ha fatto 2357 giri; si domanda la lunghezza del viaggio fatto.
Risposta: 900374 centimetri.
Cento centimetri fanno un metro; quanti metri fanno i 900374 centimetri della risposta precedente?

Risposta: 9003 metri, più 74 centimetri.

Mille metri fanno un chilometro, quanti chilometri fa la lunghezza dell'esempio precedente?

Risposta: 9 chilometri, 3 metri e 74 centimetri.

La ruota di una vettura, percorrendo un chilometro, ha fatto 250 giri; qual è la lunghezza della sua circonferenza?

Risposta: 4 metri.

Cento centesimi fanno la lira; quante lire fanno 10440 centesimi?

Risposta: 104 lire e 40 centesimi.

Un tale pagò la somma predetta di lire 104 e 40 centesimi con monete da 20 centesimi l'una, da 50 centesimi l'una, da una lira l'una, da 2 e da 5 lire l'una; impiegò per quest'effetto lo stesso numero di monete di tutte queste specie; si domanda quante monete di ciascuna specie abbia pagato.

Risposta: 12. Si trova il risultato riducendo tutti i valori predetti in centesimi, e dividendo la somma pagata (10440 centesimi) per la somma 870 de' valori delle singole monete.

Tre signori diedero per alcuni bisognosi le rispettive somme di 206, 83 e 68 lire. Si domanda quante furono le persone beneficate, sapendo che ciascuna di esse ricevette 17 lire.

Risposta: 21.

I pali del telegrafo lungo una ferrovia distano l'uno dall'altro 50 metri; in un tratto di via viaggiando ne passiamo 1 ogni tre minuti secondi; si domanda in ragione di quanti chilometri all'ora si cammina.

Risposta: 60 mila.

Nelle 19 università italiane nell' anno scolastico 1862-63 si contavano 714 professori tra ordinari, straordinari e incaricati, e 15508 studenti tra regolari e

uditori; si domanda quanti studenti in media, avesse ciascun professore.

Risposta: 21, con 514 di residuo.

Le 59 provincie del regno d'Italia abbracciano 7720 comuni; quanti comuni in media ha ciascuna provincia?

Risposta: 130, con 50 di residuo.

Calcolare il valore numerico delle seguenti espressioni algebriche, prima con questo sistema di dati:

$$a=70, \quad b=45, \quad c=17,$$

poi con quest'altro sistema:

$$a=49, \quad b=53, \quad c=19.$$

$$a \times b + c \times a,$$
$$a^2 + b^2 - c^3$$
$$(a^2 \times b + c^2) \div (a^2 \times b - a^2 \times c)$$
$$37\, a^3 \div 2\, b^2.$$

Verificare coi predetti sistemi di valori di a e di b, e con qualunque altro sistema da scegliersi arbitrariamente, le seguenti eguaglianze:

$$(a+b) \times (a+b), \text{ ossia } (a+b)^2 = a^2 + 2a \times b + b^2,$$
$$(a-b) \times (a-b), \text{ ossia } (a-b)^2 = a^2 - 2a \times b + b^2,$$
$$(a+b) \times (a-b) = a^2 - b^2.$$

§ 9. Operazioni abbreviate.

48. Le regole esposte nei paragrafi precedenti, per le operazioni sui numeri intieri, conducono in ogni caso al risultato che si cerca. Coloro però i quali avranno fatto, seguendo tali regole, un lungo esercizio di calcolo, finiscono per iscoprire da sè metodi abbreviativi, per cui senza punto discostarsi dai principii appresi, arrivano più prontamente al risultato che si

desidera. L'esporre per ordine questi metodi abbreviativi sarebbe opera troppo lunga, nè proporzionata al presente *Compendio*. Giova non pertanto, per norma dei giovani più studiosi, l'accennarne qui alcuni che sono di più frequente applicazione.

49. *Sottrazione abbreviata col complemento aritmetico*. Complemento aritmetico di un numero è ciò che manca a questo per fare il numero che è scritto colla cifra 1 seguita da tanti zeri quante sono le cifre del numero dato. Così il complemento di 7 è ciò che gli manca per fare 10, ossia è 3; il complemento di 48 è ciò che gli manca per fare 100, e vale 52; il complemento di 297 è ciò che gli manca per fare 1000, e vale 703. La sottrazione che si fa per trovare il complemento aritmetico di un numero si comincia a sinistra del numero, e si ottengono le cifre del resto sottraendo ciascuna cifra del numero dato da 9, e l'ultima cifra a destra di esso da 10. Se però il numero dato termina con zeri, questi si sottraggono da zero, e si sottrae da 10 l'ultima cifra significativa a destra del numero dato. Così senza scrivere il minuendo 10000, ad esempio, si ottiene tosto il complemento aritmetico di 3108 che è 6892. Infatti il 10000 vale 9990+10.

Si fa uso dei complementi aritmetici per abbreviare la sottrazione specialmente ne' calcoli logaritmici. Si voglia sottrarre il numero 3549 da 7891; invece di fare una sottrazione si sommano insieme il minuendo ed il complemento del sottraendo così

$$\begin{array}{r} 7891 \\ 6451 \\ \hline 14342 \end{array}$$

si toglie dalla somma un'unità del 5° ordine, e ciò che resta 4342 è il resto della proposta sottrazione.

Dalla somma dei numeri 91071, 23150, 12345 vogliasi sottrarre la somma dei numeri 80070, 12501 30001. Invece di sommare separatamente i numeri additivi ed i sottrattivi, e poi sottrarre la seconda somma dalla prima, si sommano i numeri additivi coi complementi aritmetici dei numeri sottrattivi, e dalla somma totale si sottraggono le unità eccessive dovute ai presi complementi. Ecco la somma:

```
 91071
 23150
 12345
 19930
 87499
 69999
------
303994
```

Togliendo dalla somma 303994 tre unità di sesto ordine che furono introdotte col prendere i complementi, si avrà il numero 3994 per risultato domandato.

Se i numeri sottrattivi non hanno tutti lo stesso numero di cifre, le unità aggiunte alla somma per causa de' complementi non sono tutte dello stesso ordine, quindi è difficile il passaggio dalla somma trovata al risultato che si cerca. Si evita questo inconveniente prendendo per tutti i numeri sottrattivi il complemento ad uno stesso numero, cioè prendendo il complemento al numero che è scritto colla cifra 1 seguita da tanti zeri quante sono le cifre del massimo dei numeri sottrattivi.

Vogliasi levare dal numero 61703 la somma dei numeri 1214 e 345: prendo i complementi di questi due numeri al numero 10000, e trovo pel 1214 il complemento 8786, e pel 345 il complemento 9655;

sommo questi due complementi con 61703, e dalla somma 80144 tolgo 2 unità di quinto ordine, con che ottengo pel risultato domandato 60144.

50. *Moltiplicazione*. La massima parte dei calcolatori sanno a memoria i primi nove moltipli dei numeri 11, 12 e 25; quindi per moltiplicare un numero qualunque per uno di questi tre numeri, invece di fare due prodotti parziali e quindi la somma di essi, si scrive d'un tratto il prodotto totale come ne' seguenti esempi:

$$3405\times11=37455;$$
$$14543\times12=174516;$$
$$4971302\times25=124282550.$$

Nel primo esempio si dice così: 11 per 5 55, scrivo 5 e ritengo 5; 11 per 0 zero, e 5 ritenuti 5, scrivo 5 e ritengo niente; 11 per 4 44, scrivo 4 e ritengo 4; 11 per 3 33, e 4 ritenuti 37, scrivo 37. Ottengo così il prodotto 37455. Nel 2° esempio si dice: 12 per 3 36, scrivo 6 e ritengo 3; 12 per 4 48, e 3 ritenuti 51, scrivo 1 e ritengo 5; 12 per 5 60, e 5 ritenuti 65, scrivo 5 e ritengo 6; 12 per 4 48, e 6 ritenuti 54, scrivo 4 e ritengo 5; finalmente 12 per 1 12, e 5 ritenuti 17, scrivo 17, il che mi dà per prodotto 174516. Allo stesso modo si opera sul terzo esempio.

Queste moltiplicazioni semplici si possono applicare combinate fra di loro in molti casi, come nei seguenti esempi:

Moltiplicando	458
Moltiplicatore	132
Prodotto per 12 unità . .	5496
Id. per 12 decine. .	5496
Prodotto totale	60456

Moltiplicando	973
Moltiplicatore	262
Prodotto per 12 unità . .	11676
Id. per 25 decine. .	24325
Prodotto totale	254926

Moltiplicando	2725
Moltiplicatore	2525
Prodotto per 25 unità . .	68125
Id. per 25 centinaia .	68125
Prodotto totale	6880625

Nel primo esempio il moltiplicatore 132 si è decomposto in 12 decine e 12 unità; nel secondo il moltiplicatore 262 si è decomposto in 25 decine e 12 unità.

Allorquando il moltiplicatore contiene la cifra 1, si fa servire il moltiplicando da prodotto parziale; per ciò non bisogna scrivergli sotto il moltiplicatore, ma allato, come in questi esempi:

3429×17	3429×71
24003	24003
58293	243459

Per moltiplicare un numero per 5, si moltiplica il numero per dieci collo scrivergli un zero a destra, e si divide il prodotto per 2. Per moltiplicare un numero per 25, si scrivono a destra di esso due zeri e si divide il risultato per 4. Per moltiplicare un numero per 125, si scrivono a destra di esso tre zeri e si divide il risultato per 8. Queste regole

hanno la loro ragione in ciò, che 5 vale 10 diviso per 2; 25 vale 100 diviso per 4; 125 vale 1000 diviso per 8. Per la stessa ragione si dividerà un numero per 5, per 25, per 125, moltiplicandolo rispettivamente per 2, per 4, per 8, e dividendo il prodotto rispettivamente per 10, per 100, per 1000.

Qualche volta tra le cifre del moltiplicatore si scoprono a prima vista relazioni semplicissime, per cui si ottengono abbreviazioni considerevoli nella moltiplicazione, come nell'esempio seguente:

Moltiplicando	321789
Moltiplicatore	216549
Prodotto per 9	2896101
Id. del precedente per 6	17376606
Id. del precedente per 4	69506424 .
Prodotto totale.	69683086161

Qui l'abbreviazione si è ottenuta per ciò che 54 vale 6 volte 9, e 216 vale 4 volte 54.

Facile cosa sarebbe moltiplicare gli esempi: quelli che precedono bastano per porre gli studiosi sulla via di scoprirne altri somiglianti. Si raccomanda questo esercizio specialmente a coloro che si destinano allo studio delle matematiche.

Digitized by Google

CAPO III.

PROPRIETÀ DEI NUMERI (*).

§ 1. Della divisibilità de' numeri.

51. *Definizioni. Numero primo* dicesi qualunque numero che non sia divisibile per altri numeri fuorchè per l'unità e per se stesso. I numeri 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ecc., sono numeri primi. Il 27, ad esempio, non è numero primo, risultando composto dei fattori 9 e 3.

Numeri primi fra di loro sono quelli che non hanno alcun fattore comune. Così il 14 e il 15 sono primi fra di loro, ancorchè nè l'uno nè l'altro sia separatamente *primo*. Infatti il 14 ha i soli fattori 2 e 7: il 15 ha i soli fattori 3 e 5, i quali sono diversi da quelli del 14. Così ancora i tre numeri 14, 15 e 21 sono primi fra di loro, ancorchè il 21 abbia il fattore 7 comune col 14, e il fattore 3 comune col 15; ed in vero nessun fattore è comune a tutti e tre i numeri proposti.

Un numero divisibile esattamente per un altro dicesi moltiplo di questo, il quale, rispetto al primo, dicesi *sottomoltiplo, divisore, fattore* o *parte aliquota*.

52. *Teorema.* Se un numero è divisibile per un altro, ogni moltiplo di esso sarà pure divisibile per

(*) Ritenga il lettore che in questo Capo, come nè precedenti, non si parla che dei numeri interi.

quest'altro numero. Così 12 essendo divisibile per 3, il moltiplo 12×7 sarà pure divisibile per 3. Infatti per dividere il prodotto 12×7 per 3, basta (45) dividere il solo fattore 12 per 3, la quale divisione essendo possibile, anche il moltiplo 12×7 è divisibile per 3.

53. *Teorema.* Se due numeri sono divisibili per uno stesso numero, la loro somma sarà pure divisibile per lo stesso numero. Così essendo i numeri 27 e 36 divisibili per 9, anche il numero 63, che vale $27+36$, sarà divisibile per 9. Infatti essendo $63=27+36$, il quoziente di 63 diviso per 9 è eguale alla somma de'quozienti delle parti 27 e 36 divise separatamente per 9. Ma questi due quozienti sono intieri: dunque intiero è pure il quoziente di 63 per 9.

54. *Teorema.* Se la somma di due numeri ed uno di questi hanno un divisore comune, l'altro dei due numeri è divisibile per lo stesso divisore. Così 72, somma di 56 e 16, è divisibile per 8; e 16 è pur divisibile per 8: dunque 56 sarà anche tale. Infatti il quoziente di 72 per 8 è un numero intiero; ma esso vale la somma dei quozienti di 56 e 16 per 8, ed uno di questi due (quello di 16 per 8) è intiero: dunque intiero pure dovrà essere l'altro di 56 per 8.

55. *Condizioni di divisibilità per 2, 3, 4, ecc.* Un numero è divisibile per 2 ogni volta che termina con cifra *zero* o con cifra pari, 2, 4, 6, 8 (chiamasi *pari* ogni numero divisibile esattamente per 2). Infatti scomponendo il numero proposto in due parti, una di decine, l'altra di unità (16, 2°), le decine saranno sicuramente divisibili per 2, essendo esse un moltiplo di 10, il quale è divisibile per 2. Quindi se anche

le unità del numero proposto sono divisibili per 2, come avviene quando queste sono rappresentate da una cifra pari, tutto il numero sarà divisibile per 2. Così il numero 236, per esempio, è decomponibile in 23 decine e 6 unità le quali due parti sono separatamente divisibili per 2; dunque il numero 236 è divisibile per 2. Invero fatta la divisione, si trova il quoziente esatto 118.

Un numero è divisibile per 5 se termina con cifra *zero* o con cifra 5. Infatti scomponendo il numero in due parti, una di decine, l'altra di unità, la prima essendo un moltiplo di 10 sarà divisibile per cinque; la seconda essendo 0, o 5, divisa per 5, darà pure il quoziente esatto 0, o 1; quindi tutto il numero sarà divisibile per 5. Così i due numeri 170 e 255, per esempio, si decompongono rispettivamente in 17 decine e *zero* unità, e 25 decine e 5 unità, le quali parti essendo separatamente divisibili per 5, ambi i numeri sono divisibili per 5. Invero fatta la divisione, si trovano i rispettivi quozienti esatti 34 e 51.

Un numero è divisibile per 4, 20, 25 o 50, ogni volta che le due ultime sue cifre formano un numero divisibile per 4, 20, 25 o 50. Infatti scomposto il numero in centinaia ed unità, i divisori nominati, essendo sottomoltipli di cento, dividono esattamente le centinaia: per conseguenza se le unità saranno esse pure divisibili per uno dei detti divisori, tutto il numero sarà divisibile per lo stesso divisore. Così le ultime due cifre 1 e 2 del numero 912, per esempio, formano il numero 12 divisibile per 4, e perciò il 912 è decomponibile in due parti, una 9 centinaia, l'altra 12 unità, ambe divisibili per 4; dunque anche il numero totale 912

è divisibile per 4. Egualmente i numeri 1380, 2075, 450, per esempio, sono divisibili rispettivamente per 20, 25 e 50, poichè le ultime due cifre dei medesimi formano i numeri 80, 75, 50 rispettivamente divisibili per 20, 25, 50.

Un numero è divisibile per 8 o per 125, se le tre ultime sue cifre formano un numero divisibile per 8 o per 125. Infatti questi due numeri dividono esattamente il mille; onde scomposto il numero dato in migliaia ed unità, la prima parte è sempre divisibile per 8 e 125. Se tale sarà pure la seconda, tutto il numero è divisibile per 8 e per 125. Così il numero 35128, per esempio, ha le tre ultime cifre 1, 2 e 8 formanti il numero 128 divisibile per 8, e perciò si può decomporre nelle due parti 35 migliaia e 128 unità, ambe divisibili per 8; onde il numero stesso 35128 è divisibile per 8. Egualmente il numero 97250 decomponibile nelle parti 97 migliaia e 250 unità, ambe divisibili per 125, è divisibile per 125.

Un numero è divisibile per 9, se la somma delle sue cifre è divisibile per 9. Infatti ogni numero rappresentato dalla cifra 1 seguita da zeri, come 10, 100, 1000, ecc., diviso per 9 dà per resto 1, ed ogni numero rappresentato da una cifra significativa seguita da zeri, diviso per 9, dà per resto la stessa sua cifra significativa. Quindi scomponendo il numero qualunque proposto nelle sue unità de'diversi ordini, ne risulteranno tante parti componenti il numero proposto, quante sono le sue cifre significative, e ciascuna di queste parti (constando di una sola cifra significativa seguita da zeri) divisa per 9 dà per resto la cifra sua significativa; dunque tutto il numero proposto diviso per 9 dà per resto la

somma delle sue cifre significative. Se questo resto è esso pure divisibile per 9, tutto il numero sarà divisibile per 9. Così il numero 450216 è divisibile per 9, poichè la somma 4+5+2+1+6=18 delle sue cifre è divisibile per 9. Invero questo numero è decomponibile nelle parti 400000, 50000, 200, 10, 6, le quali divise per 9 dànno i rispettivi resti 4, 5, 2, 1, 6. Ciò significa che il numero dato è un moltiplo di 9, più la somma delle sue cifre 4, 5, 0, 2, 1, 6. Ma questa somma è divisibile per 9; dunque tutto il numero è divisibile per 9.

Un numero è divisibile per 3, se la somma delle sue cifre è divisibile per 3. La dimostrazione è identica colla precedente; basta leggere 3 dove si trova scritto 9 nella precedente dimostrazione. Così il numero 501216 è divisibile per 3, essendo la somma delle sue cifre 5+1+2+1+6=15 divisibile per 3.

Un numero è divisibile per 11, se la differenza tra la somma delle cifre sue rappresentanti le unità d'ordine pari e la somma delle cifre rappresentanti le unità d'ordine impari è *zero*, ovvero un moltiplo di 11.

Infatti ogni unità d'ordine impari, come 1, 100, 10000, 1000000, ecc., diminuita di 1, dà un numero composto di un numero pari di cifre 9, e per conseguenza divisibile per 11; quindi 2 unità d'ordine impari diminuite del numero due dànno un numero divisibile per 11, ed in generale un numero scritto con una cifra significativa seguito da un numero pari di zeri, diminuito del valore assoluto della cifra significativa, diventa divisibile per 11.

Ogni unità poi d'ordine pari, ossia ogni numero scritto colla cifra 1 seguita da un numero impari di zeri, accresciuta di 1, diventa divisibile per 11;

poichè se invece di accrescerla di una unità, si diminuisse di dieci unità, essa darebbe un numero composto di un numero pari di cifre 9 seguite da uno zero, come avviene in 1000—10=990. Ma un numero come quest'ultimo è evidentemente divisibile per 11, ed accresciuto di 11 unità, ossia di 10+1, non cessa di essere un moltiplo di 11; dunque sta il principio enunciato. Quindi un numero scritto con una cifra significativa seguita da un numero impari di zeri, accresciuto del valore assoluto della cifra significativa, diventa divisibile per 11.

Si tratti ora di verificare se il numero 380699, per esempio, sia divisibile per 11. Scomponiamolo nelle sue unità dei differenti ordini, che sono 300000, 80000, 0, 600, 90, 9. Si vede, pei principii ora dimostrati, che la prima e la quinta parte, aggiungendo loro rispettivamente 3 e 9, diventano divisibili per 11, mentre la seconda, quarta e sesta parte lo diventano sottraendo da esse rispettivamente 8, 6 e 9. Onde tutto il numero diventerà un moltiplo di 11, se gli aggiungiamo 3 e 9, ossia la somma delle cifre d'ordine pari, e sottrarremo poscia da esso 8, 6 e 9, ossia la somma delle cifre d'ordine impari.

In altri termini, un numero diventa un moltiplo di 11, se gli aggiungiamo la differenza fra la somma delle cifre d'ordine pari e la somma delle cifre di ordine impari; e per conseguenza se questa differenza è zero o un numero divisibile per 11, il numero dato è divisibile per 11. Nell'esempio proposto la differenza delle due somme è 11: dunque il numero 380699 è divisibile per 11.

Se un numero sia divisibile per 7, 13, ecc., si riconosce più facilmente colla divisione diretta, che con qualunque regola finora proposta.

§ 2. Prova per 9 e per 11.

56. I caratteri di divisibilità di un numero per 9 e per 11, studiati nel numero precedente, somministrano un facile mezzo per conoscere il resto della divisione di un numero per 9 e per 11, senza eseguire la divisione; e quindi ci porgono un mezzo facile di prova o verificazione delle quattro operazioni dell'aritmetica.

Risulta abbastanza dalle cose dette nel n⁰ citato, che il resto della divisione di un numero per 9 è eguale al resto della divisione della somma delle sue cifre per 9; ed il resto della divisione del numero per 11 è uguale al resto che si ottiene dividendo per 11 la somma delle cifre d'ordine impari, diminuita della somma delle cifre d'ordine pari. Così il resto della divisione di 15382 per 9 si trova levando tante volte, quante si può, il 9 dalla somma 19 delle cifre del numero; si ha in tal modo il resto 1. Non è sempre necessario di fare tutta la somma delle cifre; a misura che si compone questa somma, si tolgono via i moltipli di 9. Così pel numero 15382 dico 1 più 5 fa 6, più 3 fa 9, e rigetto questo 9 come se nulla fosse, e continuo 8 più 2 fa 10, e resta 1. Parimente nel numero 301825 la somma delle cifre d'ordine impari è $5+8=13$, quella delle cifre d'ordine pari è $2+1+3=6$; la prima somma meno la seconda fa $13-6=7$, il quale numero è il resto della divisione del numero dato per 11. Egualmente nel numero 1809172900 la somma delle cifre d'ordine impari è

33, quella delle cifre d'ordine pari è 4; la differenza è 33—4=29. Tolto due volte 11 da 29 resto 7 che è il resto della divisione del numero dato per 11.

Se la somma delle cifre d'ordine impari fosse minore di quella delle cifre d'ordine pari, la si renderebbe maggiore coll'aggiungervi una o più volte 11, la qual cosa non cambia il resto della divisione. Così nel numero 270 la somma 2 delle cifre d'ordine impari essendo minore della somma 7 delle cifre d'ordine pari, aggiungo 11 a 2 e ottengo 13, il quale numero riguardo come somma delle cifre d'ordine impari. Quindi la sottrazione 13—7=6 mi fa conoscere il resto 6 della divisione di 270 per 11.

57. *Prova dell'addizione*. Ciascuno de' numeri da sommare è un moltiplo di 9, più un resto minore di 9 (quel moltiplo può anch'essere zero volte nove, ossia zero); quindi la somma degli stessi numeri è un moltiplo di 9, più la somma de'resti. Ma questa somma de'resti è essa stessa in generale un moltiplo di 9, più un numero minore di 9, cosicchè il resto della divisione della somma totale per 9 deve essere eguale al resto della divisione della somma dei resti nominati per 9. Pertanto, onde verificare se l'addizione è fatta a dovere, si procede come spiegherò nel seguente esempio:

	45071	8
	91023	6
	8025	6
	1248	6
8	145367	8

Scrivo a destra de'numeri da sommare i resti rispettivi della loro divisione per 9, i quali nel no-

stro esempio sono in ordine 8, 6, 6, 6. Scrivo sotto ai medesimi sulla linea della somma il resto 8 della divisione della loro somma per 9. Trovato poscia il resto della divisione della somma 145367 per 9, che è pure 8, e che scrivo a sinistra della somma stessa, conchiudo non esservi indizio d'errore commesso nell'operazione.

Sostituendo 11 a 9 nel ragionamento che precede, arriviamo ad analoga regola per 11, come si arriverebbe allo stesso modo per un altro numero qualunque. Ecco la regola dell'11 applicata all'esempio che precede:

	45071	4
	91023	9
	8025	6
	1248	5
2	145367	2

58. *Sottrazione*. Si opera come nell'addizione riguardando il resto ed il sottraendo come numeri da sommare, ed il minuendo come la loro somma. Esempio pel 9:

5	187052	5
	91209	3
	95843	2

Applichiamo la regola dell'11 allo stesso esempio:

8	187052	8
	91209	8
	95843	0

59. *Moltiplicazione*. Siano due fattori qualunque, per esempio 38 e 53. Il loro prodotto è 2014. Osservo che è $38=4\times9+2$, e $53=5\times9+8$, od in

altri termini, osservo che i resti della divisione dei due fattori per 9 sono rispettivamente 2 e 8. Si avrà dunque

$$38\times53=2014=(4\times9+2)(5\times9+8),$$

ossia, eseguendo la moltiplicazione dell'ultimo membro per parti (34),

$$2014=4\times9\times5\times9+8\times4\times9+2\times5\times9+2\times8.$$

De'quattro termini che stanno dopo il segno di eguaglianza, i tre primi contengono in evidenza il fattore 9; dunque la loro somma è un moltiplo di 9. L'ultimo termine poi $2\times8=16$, diminuito di 9 diventa 7. Dunque il resto della divisione del prodotto 2014 per 9 è 7, ed è uguale al resto della divisione del prodotto 2×8 per 9. Ora 2 ed 8 non sono che i resti della divisione dei due fattori 38 e 53 per 9; quindi si vede che, per applicare questo modo di prova alla moltiplicazione, basta fare il prodotto de'resti de'due fattori divisi per 9, e cercare il resto della divisione di quel prodotto per lo stesso 9. Quest'ultimo resto dev'essere eguale al resto della divisione del prodotto totale per 9.

Scomponendo i fattori 38 e 53 rispettivamente in $3\times11+5$ e $4\times11+9$, e ragionando allo stesso modo, si scopre che il resto della divisione del prodotto 2014 per 11 dev'essere eguale al resto del prodotto de'resti 5 e 9 de'due fattori divisi per 11.

Ecco l'esempio per la prova del 9:

$$\begin{array}{rrr} & 38 & 2 \\ & \underline{53} & \underline{8} \\ & 114 & 16 \\ & \underline{190} & 7 \\ 7 & 2014 & \end{array}$$

A destra dei due fattori si scrivono i loro resti 2 e 8 della divisione per 9, e sotto ai medesimi il loro prodotto 16, e sotto a questo il resto 7 della sua divisione per 9. A sinistra del prodotto 2014 scrivo il resto della sua divisione per 9, il quale resto essendo 7 come il precedente, conchiudo non esservi indizio di errore nell'operazione.

Ecco lo stesso esempio per la prova dell'11:

```
        38      5
        53      9
       ----    ---
       114     45
      190       1
      -----
1     2014
```

60. *Divisione.* Il dividendo è il prodotto del divisore pel quoziente; dunque, se non vi è resto della divisione, si applica la regola del numero precedente riguardando il quoziente ed il divisore come fattori, e il dividendo come il loro prodotto.

Esempio pel 9:

```
7     2014    | 53      8
      159     ----      2
      ----     38      ---
       424             16
       424              7
      ----
        0
```

Lo stesso esempio per l'11.

```
1     2014    | 53      9
      159     ----      5
      ----     38      ---
       424             45
       424              1
      ----
        0
```

Se vi ha resto, cioè se la divisione non si fa esattamente, allora bisogna aggiungere il residuo della divisione del resto per 9 o per 11 al residuo della divisione del prodotto de' due residui relativi al divisore ed al quoziente.

61. *Osservazione.* Se le precedenti prove non riescono, si può asserire che l'operazione è stata male eseguita; e se riescono, è probabile che l'operazione sia stata ben fatta, non si può però nulla conchiudere sull'esattezza di questa, poichè se l'errore fatto fosse di un moltiplo di 9 per la regola del 9, o di un moltiplo di 11 per la regola dell'11, queste prove non sarebbero sufficienti a far discoprire l'errore commesso.

§ 3. Del massimo comune divisore.

62 *Teorema.* Dati due numeri, che rappresenterò colle lettere dell'alfabeto a e b, alle quali il lettore potrà sostituire numeri intieri qualunque, se il maggiore di essi, per esempio a, diviso pel numero b, dà un quoziente intiero q con un resto r, tutti i divisori comuni ad a e b sono pure comuni a b ed r, e viceversa tutti i divisori comuni a b ed r sono pure comuni ad a e b. Infatti abbiamo (40)

$$a = b \times q + r,$$

cosicchè il numero a si compone di due parti, una $b \times q$, l'altra r. Notando che i divisori di b dividono anche $b \times q$, che è moltiplo di b (52), si conchiuderà tosto (54) che tutti i divisori comuni ad a e b, dividendo la somma a delle due parti, e la parte

$b \times q$, dividono pure l'altra parte r, e per conseguenza sono pure divisori comuni a b ed r. I divisori poi comuni a b ed r dividendo le due parti di cui si compone a, dividono a, e sono comuni ad a e b, il che era da dimostrare.

63. *Definizione*. Chiamasi *massimo comune divisore* di due numeri il più gran numero che li divide tutti e due esattamente. È evidente che il massimo comune divisore di due numeri non può essere maggiore del minore di essi. Quindi se il maggiore dei due numeri dati è divisibile pel minore, questo sarà evidentemente il loro massimo comune divisore, poichè esso divide l'altro, e divide se stesso (ogni numero in se stesso sta esattamente una volta).

64. *Ricerca del massimo comune divisore di due numeri*. Si divida il numero maggiore pel minore; se questa divisione riesce senza resto, il numero minore, per ciò che si è detto, è il massimo comune divisore cercato. Se vi sarà un resto, il massimo comune divisore de' due numeri dati sarà lo stesso che quello che ha luogo tra il minore di questi ed il resto della divisione eseguita; infatti (62) tutti i divisori comuni al numero minore dato ed al resto sono pure comuni ai due numeri dati, e viceversa, cosicchè le due coppie di numeri (cioè i due numeri dati, ed il minore di essi e il resto della divisione) hanno lo stesso massimo comune divisore. Divideremo adunque il numero minore dato pel resto della prima divisione, e se questa seconda divisione riesce senza resto, il numero che in essa servì di divisore sarà il massimo comune divisore cercato. In caso contrario vi sarà un secondo resto, e ripetendo il ragionamento di sopra, si riconoscerà che il massimo comune divisore cercato sarà lo stesso che quello de' due resti

delle divisioni fatte. Si dividerà pertanto il primo di tali resti pel secondo, e già ben si comprende che bisognerà spingere avanti questa serie di divisioni finchè si arrivi ad un resto zero. L'ultimo divisore, ossia l'ultimo resto diverso da zero sarà il massimo divisore che si cerca. Nasce quindi la seguente:

65. *Regola pratica.* Per trovare il massimo comune divisore di due numeri dati, si divide il maggiore di questi pel minore. Se la divisione si fa esattamente senza resto, il numero minore sarà esso stesso il massimo comune divisore cercato. Se vi ha resto, si divide il numero minore pel resto. Ove questa divisione si faccia esattamente, il resto della prima divisione sarà il massimo comune divisore; se no, vi sarà un nuovo resto. Si dividerà il primo resto pel nuovo resto, e quest'ultimo sarà il massimo comune divisore cercato, se divide esattamente il primo, in caso contrario, vi sarà un terzo resto. Si dividerà il secondo resto pel terzo resto, e così di seguito finchè si arrivi ad una divisione che si faccia esattamente. Il divisore di quest'ultima divisione sarà il massimo comune divisore cercato. Se esso fosse eguale all'unità, sarebbe segno che i due numeri proposti non avrebbero comune divisore, e sarebbero primi fra di loro.

Ecco come si suole disporre questa serie di operazioni. Si domandi, ad esempio, il massimo comune divisore dei numeri 1540 e 120

	12	1	5
1540	120	100	20
120	100	100	
340	20	0	
240			
100			

Digitized by Google

Divido come al solito il 1540 per 120; scrivo il quoziente 12 sopra al divisore. Il resto 100 della divisione si porta a destra del divisore 120 per dividere questo per quello. Il nuovo quoziente 1 si scrive sopra il divisore 100, e il resto 20 si porta a destra del divisore 100, il quale essendo esattamente divisibile per 20, il 20 sarà il massimo comune divisore cercato. In questa serie di operazioni il divisore e il resto di ciascuna divisione diventano rispettivamente dividendo e divisore della divisione seguente. Dei quozienti non è necessario tener conto alcuno.

66. Se nella serie dei resti se ne trova uno che sia numero primo, e che non divida esattamente il resto precedente, è inutile continuare l'operazione, potendosi conchiudere che i numeri dati non hanno comune divisore. Infatti se ne avessero uno, esso dovrebbe dividere quest'ultimo resto, il quale, per essere primo, non è divisibile fuorchè per l'unità e per se stesso (51).

67. *Teorema.* Il massimo comune divisore di due numeri è moltiplo di ognuno de' divisori comuni agli stessi numeri. Infatti risulta dalla dimostrazione del num. 62, che due resti consecutivi delle divisioni, che si fanno nella ricerca del massimo comune divisore, sono divisibili per tutti i fattori comuni ai due numeri. Dunque anche l'ultimo resto, il quale è il massimo comune divisore dei due numeri, è divisibile per ognuno di questi fattori, ossia è moltiplo di ognuno di essi.

68. *Corollario.* Dunque il massimo divisore comune a più di due numeri è lo stesso che quello comune al massimo comune divisore di due tra essi e dei rimanenti. Così il massimo comune divisore dei numeri 1540, 120, 330 è lo stesso che il massimo

comune divisore di 330 e 20, essendo (65) il numero 20 il massimo comune divisore di 1540 e 120. Quindi si deduce la seguente:

69. *Regola*. Per trovare il massimo divisore comune a più di due numeri si cerca da prima il massimo comune divisore di due de' numeri dati, poi il massimo comune divisore tra il risultato trovato ed un terzo de' numeri dati, e poi ancora il massimo comune divisore tra l'ultimo risultato trovato ed un quarto de' numeri dati, e così di seguito, finchè siansi fatti passare tutti i numeri dati. L'ultimo risultato sarà il massimo comune divisore che si cerca. Nell'applicazione di questa regola è utile cominciare dai più piccoli fra i numeri dati.

§ 4. Alcuni teoremi sui numeri.

70. *Definizione*. Chiamansi *fattori primi* e talvolta anche *semplici* di un numero tutti i numeri primi che lo dividono esattamente; gli altri sono fattori *composti*.

71. *Teorema*. Ogni numero n che divide esattamente il prodotto $a \times b$ di due fattori a e b, e che è primo con uno di questi due fattori, divide necessariamente l'altro fattore. Dimostrerò questa verità sopra un esempio particolare; la dimostrazione non cessa però di essere generale, potendosi applicare a qualunque esempio. Sia adunque il prodotto $24 \times 27 = 648$ de' due fattori 24 e 27. Il numero 8, ad esempio, divide questo prodotto, ma è primo col fattore 27, per conseguenza dico che il numero 8

divide l'altro fattore 24. Infatti se applichiamo all'8 e al 27, che sono primi fra di loro, il metodo della ricerca del massimo comune divisore (65), arriviamo all'ultimo resto eguale all'unità; e fatte le divisioni si trovano i quozienti successivi 3, 2, 1 coi rispettivi resti 3, 2, 1. Perciò avremo (40) le eguaglianze corrispondenti a ciascuna divisione

$$27 = 3\times8 + 3,$$
$$8 = 2\times3 + 2,$$
$$3 = 1\times2 + 1.$$

Ora è chiaro che se moltiplichiamo per uno stesso numero due quantità eguali, l'eguaglianza continua a sussistere. Moltiplicando adunque per 24 le quantità precedenti avremo le eguaglianze

$$27\times24 = 3\times8\times24 + 3\times24,$$
$$8\times24 = 2\times3\times24 + 2\times24,$$
$$3\times24 = 1\times2\times24 + 24.$$

In questo modo i primi membri di queste eguaglianze sono decomposti in due parti formanti i secondi membri. Ora ricordando il principio del numero 54 e quello del numero 45, ben si scorge che l'ultima parte 3×24 della prima eguaglianza è divisibile per 8, poichè il tutto 27×24 è per ipotesi divisibile per 8, e la parte $3\times8\times24$ lo è pure, poichè ha il fattore 8 in evidenza. Ciò premesso, il primo membro 8×24 della seconda eguaglianza è evidentemente divisibile per 8, e tale è pure la parte $2\times3\times24$, del secondo membro, poichè per dimostrazione 3×24 è divisibile per 8. Dunque anche l'ultima parte 2×24 è divisibile per 8. Finalmente venendo all'ultima eguaglianza, le quantità 3×24 e $1\times2\times24$ sono per di-

mostrazione divisibili per 8; dunque anche l'ultima parte 24 è divisibile per 8, il che era da dimostrare (*).

72. *Teorema.* Se il prodotto $a \times b \times c$ di più fattori è divisibile per un numero primo n, uno dei fattori è divisibile necessariamente per n. Infatti se il fattore a, per esempio, non è divisibile per n, esso è primo con n, poichè questo è un numero primo assoluto; dunque pel teorema precedente sarà $b \times c$ divisibile per n. Supponiamo ora b non divisibile per n, si dimostra allo stesso modo che sarà c divisibile per n. Dunque, ecc. La proposizione è vera qualunque sia il numero de' fattori.

73. *Corollario.* Se una potenza qualunque a^m di un numero a è divisibile per un numero primo n, il numero a è divisibile per n.

74. *Teorema.* Ogni numero n che sia primo con ciascuno de' fattori di un prodotto $a \times b \times c$, è primo con questo prodotto stesso. Infatti se n ed il prodotto $a \times b \times c$ avessero un fattore primo comune, questo, pe' teoremi precedenti, dovrebbe pure essere comune ad alcuno dei fattori a, b, c, e non sarebbe n primo con questi.

75. *Corollario.* Un numero che risulti dalla moltiplicazione di più fattori contiene tutti i fattori primi contenuti ne' fattori stessi, e non può contenerne altri.

Altro corollario. Qualunque numero non può decomporsi che in un solo sistema di fattori primi.

76. *Teorema.* Un numero n divisibile per due o più numeri a, b, c, ... primi fra di loro due a due

(*) **I principianti che aspirano allo studio delle matematiche debbono abituarsi fin da principio a questo genere di dimostrazioni, e ripeterle sostituendo ai numeri lettere dell'alfabeto.**

è divisibile pel loro prodotto. Infatti sia q il quoziente di n diviso per a, si avrà $n=a\times q$; ma n, ossia $a\times q$, è pure divisibile per b, ed essendo a e b primi fra di loro, sarà (71) q divisibile per b, cosicchè chiamando q' il quoziente di q diviso per b, si avrà $q=b\times q'$, d'onde $n=a\times b\times q'$. Ora n, ossia $a\times b\times q'$, è divisibile per c, il quale è primo con a e b, ed anche (74) con $a\times b$; dunque (71) q' è divisibile per c, cosicchè sarà $q'=c\times q''$ (chiamando q'' il quoziente). Perciò $n=a\times b\times c\times q''$, e sarà in conseguenza n divisibile pel prodotto $a\times b\times c$, il che era da dimostrarsi.

Quindi se un numero accoppia i caratteri di divisibilità (55) per 2 e per 3, per esempio, esso sarà divisibile per 6, cosicchè un numero è divisibile per 6 quando termina con cifra 0 o pari e la somma delle sue cifre è divisibile per 3.

77. *Corollario.* Se i fattori a, b, c, ... primi fra di loro due a due entrano ciascuno nel numero n un numero di volte espresso rispettivamente da $p, q, r, \ldots$, il numero n sarà divisibile per $a^p\times b^q\times c^r\ldots$, e per tutti i numeri che si possono ottenere col moltiplicare due a due, tre a tre, ecc., le diverse potenze di $a, b, c, \ldots$ non maggiori rispettivamente di $p, q, r, \ldots$

78. *Corollario.* Perchè un numero sia divisibile per un altro è necessario e basta che il primo contenga tutti i fattori primi del secondo, ripetuti per lo meno tante volte quante sono nel secondo.

§ 5. Ricerca de' divisori dei numeri.

79. Risulta abbastanza dai principii del § precedente che ogni numero è primo, o è il prodotto di numeri primi, alcuni dei quali possono anche entrarvi più volte come fattori; e che sopprimendo colla divisione uno dei fattori primi, il quoziente è il prodotto de' fattori primi rimanenti. Si deduce quindi il seguente metodo pratico per decomporre un numero ne' suoi fattori tanto primi che composti.

Siano da cercare i fattori primi e composti del numero 1540. Ecco come si dispone l'operazione:

1540	2
770	2, 4
385	5, 10, 20
77	7, 14, 28, 35, 70, 140
11	11, 22, 55, 77, 44, 110, 154, 385,
	220, 308, 770.

Si scrive, come si vede, il numero proposto 1540, e a destra di esso si tira una linea verticale; si cerca se il numero sia divisibile per 2; essendolo, scrivo il 2 a destra. Divido il 1540 per questo primo fattore 2; il quoziente 770 essendo ancora divisibile per 2, scrivo una seconda volta a destra il fattore 2 sotto al primo. Divido il 770 per 2, e ottengo 385; vedo che questo numero non è divisibile per 2, nè per 3, bensì per 5; scrivo il 5 a destra sotto ai fattori già trovati. Divido il 385 per 5; il quoziente 77 non è più divisibile per 5, bensì per 7; scrivo 7 nella colonna de'fattori semplici sotto al 5. Divido il 77 per 7, e trovo 11, il quale essendo un numero primo, lo scrivo nella colonna dei fattori semplici. L'11 non avendo più altri fattori, la ri-

cerca de'fattori semplici è finita. Sono pertanto fattori primi del numero 1540 il 2 ripetuto due volte, il 5, il 7 e l'11. Moltiplicando questi fattori tra di loro due a due, tre a tre, quattro a quattro, si ottengono tutti i fattori composti, che si veggono scritti a destra dei fattori primi. Il prodotto di tutti i fattori primi riproduce il numero proposto. Così sarà

$$1540=2\times2\times5\times7\times11=2^2\times5\times7\times11$$

Questa operazione si riduce dunque a ricercare da prima e successivamente se il numero proposto sia divisibile pei fattori primi 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ecc., ed a moltiplicare poscia i fattori trovati due a due, tre a tre, quattro a quattro, ecc., per ottenere i fattori composti, escludendo i prodotti ripetuti.

80. Ritornando all'esempio del numero precedente applicherò al medesimo una regola assai semplice per trovare prontamente e con ordine tutti i fattori composti di un numero, quando si conoscano i suoi fattori primi. I fattori primi del 1540 essendo 2, 2, 5, 7, 11, scrivo in linea orizzontale i tre numeri 1, 2, 4 (che sono *l' unità* e le due potenze (32) prima e seconda del fattore 2), pe'quali certamente il numero 1540 è divisibile. Scrivo poscia in seconda linea orizzontale i prodotti de'tre numeri precedenti per 5, ed avrò così già sei de'fattori del numero dato, scritti su due linee di tre numeri ciascuna. Moltiplico in seguito successivamente i tre numeri della prima linea ed i tre della seconda per 7 (terzo fattore primo del numero dato), e scrivo sulle due linee seguenti i sei prodotti. Finalmente moltiplico per 11 (fattore primo del numero dato) ciascuno de' numeri delle quattro linee scritte, e scrivo i prodotti sulle quattro linee se-

guenti, ed avrò così in un solo quadro tutti i divisori del numero 1540, compresa l'unità ed il numero stesso. Ecco la tavola delle operazioni:

1	2	4
5	10	20
7	14	28
35	70	140
11	22	44
55	110	220
77	154	308
385	770	1540.

Siano ancora da trovare tutti i divisori del numero 4200. Dopo di averne ottenuto i fattori primi che sono 2, 3, 5, 7, e di avere riconosciuto che $4200=2^3\times3\times5^2\times7$, scrivo in una linea orizzontale i numeri 1, 2, 4, 8 (che sono l'*unità* e le tre prime potenze del fattore 2), pei quali è divisibile il numero dato, poichè esso contiene il fattore 2^3. Moltiplico poscia ciascuno de'quattro numeri scritti pel fattore 3, e scrivo i prodotti in una seconda linea orizzontale. Venendo poscia al fattore 5, che entra due volte nel numero dato, moltiplico tutti i numeri delle due linee già scritte per 5, ed ottengo due nuove linee di fattori del numero proposto; quindi moltiplico tutti i numeri delle due ultime linee ancora per 5, ed ottengo altre due linee che colle precedenti fanno sei. Finalmente, venendo al fattore 7, moltiplico ciascuno de'numeri delle sei linee trovate per 7, con che ottengo sei nuove linee, le quali colle precedenti contengono tutti i fattori semplici e composti del numero 4200. Tali fattori saranno in numero di 48, poichè ve ne ha 12 linee di quattro numeri per linea.

Nella pratica conviene sempre scrivere nella prima

linea l'unità seguita dalle potenze successive del fattor primo che è più volte ripetuto nel numero dato. Ecco qui il quadro de'fattori pel numero 4200:

1	2	4	8
3	6	12	24
5	10	20	40
15	30	60	120
25	50	100	200
75	150	300	600
7	14	28	56
21	42	84	168
35	70	140	280
105	210	420	840
175	350	700	1400
525	1050	2100	4200.

81. In generale siano a, b, c,.... i fattori primi differenti di un numero n, ed entrino i medesimi in n, rispettivamente p, q, r, ... volte come fattori, sarà $n = a^p \times b^q \times c^r$ ... Per ottenere tutti i divisori di n si scrive sulla prima linea orizzontale l'*unità* seguita da tutte le potenze di un fattore a fino alla p^{esima} inclusive così:

$$1 \quad a \quad a^2 \quad a^3 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad a^p$$

e si ottengono in questo modo $p+1$ divisori di n, compresa l'unità. Poscia si moltiplica ciascuno di questi divisori per un altro fattore b, e si ottiene una seconda linea di $p+1$ divisori; ed ognuno de'q divisori eguali a b dando una nuova linea, dopo esauriti tutti i fattori primi eguali a b avremo in tutto $q+1$ linee di $p+1$ divisori ciascuna, ossia avremo già in tutto un numero di divisori di n eguale al prodotto $(p+1) \times (q+1)$. Ma questi vanno moltiplicati in seguito ciascuno per c, ed ogni fat-

tore primo eguale a c dà un numero di divisori espresso da $(p+1)\times(q+1)$; dunque dopo di avere esaurito i fattori eguali a c, il numero totale che avremo de'fattori di n sarà espresso da $c+1$ volta il prodotto $(p+1)\times(q+1)$ ossia da $(p+1)\times(q+1)\times(c+1)$. Continuando il ragionamento, si vede che qualunque sia il numero de'fattori primi eguali o diseguali di un numero n, il numero totale de'divisori di questo (compreso 1 ed n) è dato dal prodotto degli esponenti de'fattori primi diversi del numero n, aumentati ciascuno di un'unità. Giova ricordare che l'assenza di esponente indica l'esponente 1. Così abbiamo trovato (80) $4200=2^3\times3\times5^2\times7$. Dunque il numero totale de'divisori di 4200 è dato dal prodotto $4\times2\times3\times2=48$, il che è d'accordo col risultato del n° citato.

§ 6. Numeri primi e forme dei numeri.

82. *Formazione di una tavola di numeri primi.* Per giudicare se un numero dato sia primo o no, bisogna verificare se il medesimo sia o no divisibile per qualcheduno de'numeri primi minori di esso. Si prova adunque se il numero dato sia divisibile per 2, per 3, per 5, per 7, ecc. Visto ch'esso non è divisibile per nessun numero primo minore di lui, si conchiuderà che esso non è nemmeno divisibile per fattori composti, e che in conseguenza è un numero primo. Ma non è necessario di cercare se il numero dato sia divisibile per tutti i numeri primi minori di lui; infatti sia, per esempio, il numero 97; osservando che $10\times10=100>97$, dico che basta accertarsi che il 97 non è divisibile per alcun fattore primo minore di 10 per conchiudere

che esso è un numero primo. Invero se il 97 fosse divisibile per un numero maggiore di 10, esso sarebbe pure di necessità divisibile pel quoziente di quella divisione, il quale deve essere minore di 10, poichè 10×10=100, ed il quoziente nominato moltiplicato pel divisore supposto maggiore di 10 deve fare solo 97. Dunque se il 97 non è divisibile per alcun fattore minore di 10, esso è primo. Ora il 2, il 3, il 5 ed il 7, che sono i soli numeri primi minori di 10, non dividono il 97; dunque 97 è un numero primo. Riflettendo sul fatto ragionamento, si scorge che per verificare se un dato numero è primo, basta provare se esso sia divisibile per qualcheduno de' numeri primi non maggiori della sua radice quadrata (33).

Quindi è facile costruire una tavola de' numeri primi minori di 100; ma pe'numeri grandi la costruzione di una simile tavola può divenire penosissima.

Alcuni costruiscono le tavole dei numeri primi col metodo detto il *crivello di Eratostene*. Si scrivono i numeri naturali in ordine di grandezza loro in colonna; 1, 2, 3, 4, 5, 6, ecc., poscia colla penna alla mano si cancellano tutti i numeri divisibili per 2, contando a partir dall'1 i numeri consecutivi dicendo; *uno*, *due; uno*, *due; uno*, *due;* ecc., e cancellando tutti i numeri su cui cade la pronuncia del *due*, che sono pari, lasciando però sussistere il primo *due*. Poi si fa lo stesso per 3, dicendo: *uno*, *due*, *tre; uno*, *due*, *tre;* ecc., e cancellando tutti i numeri corrispondenti al *tre*, eccetto il primo. Si cancellano così tutti i numeri divisibili per 3. Si opera in seguito allo stesso modo per 5, 7, 11, 13, ecc., applicando questa operazione a tutti i numeri primi

non maggiori della radice quadrata del massimo numero contenuto nella tavola de'numeri scritti. I numeri che rimangono nella tavola dopo fatte le descritte cancellazioni sono tutti primi.

Ecco qui una tavola de'numeri primi fino a 1499.

1	89	223	359	503	659	827	997	1163	1321
2	97	227	367	509	661	829	1009	1171	1327
3	101	229	373	521	673	839	1013	1181	1361
5	103	233	379	523	677	853	1019	1187	1367
7	107	239	383	541	683	857	1021	1193	1373
11	109	241	389	547	691	859	1031	1201	1381
13	113	251	397	557	701	863	1033	1213	1399
17	127	257	401	563	709	877	1039	1217	1409
19	131	263	409	569	719	881	1049	1223	1423
23	137	269	419	571	727	883	1051	1229	1427
29	139	271	421	577	733	887	1061	1231	1429
31	149	277	431	587	739	907	1063	1237	1433
37	151	281	433	593	743	911	1069	1249	1439
41	157	283	439	599	751	919	1087	1259	1447
43	163	293	443	601	757	929	1091	1277	1451
47	167	307	449	607	761	937	1093	1279	1453
53	173	311	457	613	769	941	1097	1283	1459
59	179	313	461	617	773	947	1103	1289	1471
61	181	317	463	619	787	953	1109	1291	1481
67	191	331	467	631	797	967	1117	1297	1483
71	193	337	479	641	809	971	1123	1301	1487
73	197	347	487	643	811	977	1129	1303	1489
79	199	349	491	647	821	983	1151	1307	1493
83	211	353	499	653	823	991	1153	1319	1499

Esistono tavole stampate contenenti tutti i numeri primi, fino a oltre tre milioni.

83. *Forme de'numeri.* Ogni numero pari è divisibile per 2; perciò ogni numero pari è il prodotto di 2 per un numero intiero. Chiamando k un numero qualunque intiero 0, 1, 2, 3, ecc., la formola $2 \times k$, o ciò che dice lo stesso, $2k$, rappresenterà qualunque numero pari 0, 2, 4, 6, ecc. Parimente ogni numero impari vale un numero pari accresciuto o diminuito di una unità; quindi la formola $2k+1$, o quest'altra, $2k-1$, esprime ogni numero impari 1, 3, 5, 7, ecc. Suolsi perciò dire che i numeri pari sono della forma $2k$, ed i numeri impari della forma $2k \pm 1$. Le due formole $2k$ e $2k+1$ abbracciano tutti i numeri; il che fa dire che ogni numero è o un moltiplo di 2, o un moltiplo di 2 accresciuto di un'unità, intendendo qui per moltiplo di un numero anche il prodotto del numero moltiplicato per *zero*.

Egualmente ogni numero è o un moltiplo di 3, o un moltiplo di 3 più un'unità, o un moltiplo di 3 più due unità, cosicchè tutti i numeri sono abbracciati nelle tre formole riunite $3k$, $3k+1$, $3k+2$. Ma un moltiplo di 3 più due unità vale un moltiplo di 3 meno un'unità, così $14 = 3 \times 4 + 2 = 3 \times 5 - 1$. Dunque alla formola $3k+2$ possiamo sostituire quest'altra $3k-1$, e perciò tutti i numeri sono compresi nelle formole riunite $3k$ e $3k \pm 1$. Quest'ultima si legge *tre k più o meno uno*. Vale a dire non vi ha numero che non sia di una di queste tre forme: $3k$, $3k+1$, $3k-1$.

Egualmente è facile riconoscere che le formole $4k$, $4k+1$, $4k-1$ e $4k+2$ abbracciano tutti i numeri, e non vi ha numero che non sia di una di queste forme.

Partendo dal 6, si scorgerà facilmente che ogni numero è di una delle seguenti forme: $6k$, $6k\pm1$, $6k\pm2$, $6k+3$.

84. La difficoltà di riconoscere se un numero grande sia primo o no, e l'importanza, in alcuni casi, di tale cognizione hanno fatto cercare una formola capace di dare tutti i numeri primi, coll'esclusione di qualunque numero composto. Una tale formola non si è ancora trovata. Si sa però e si dimostra facilmente, che tutti i numeri primi, eccettuati il 2 ed il 3, sono compresi nelle due formole $6k+1$ e $6k-1$. Infatti un numero maggiore di 3, e non compreso in queste formole, non può essere primo, poichè (83) esso sarà di una delle forme $6k$, $6k+2$, $6k-2$, $6k+3$, le quali formole o espressioni constando tutte di due parti divisibili separatamente per 2, o per 3, rappresentano numeri divisibili per 2 o per 3, e perciò non primi. Dunque tutti i numeri primi maggiori di 3 sono compresi nella formola $6k\pm1$. Non ne segue però che tutti i numeri dati da questa formola siano primi. Infatti per $k=4$, per esempio, la formola $6k+1$ dà il numero 25 che non è primo, e per $k=6$ la formola $6k-1$ dà 35 che non è primo.

Si conoscono formole che sono veramente meravigliose per dare numeri primi; così la seguente, $41-k+k^2$, facendo successivamente $k=0$, 1, 2, 3, ecc., dà moltissimi numeri primi; anzi i 40 primi numeri che si ottengono in tale maniera sono tutti primi.

85. *Teorema*. La serie de'numeri primi è illimitata. Infatti se non è illimitata, sia a il massimo numero primo, e chiamisi b la somma dell'unità col prodotto de'numeri naturali da 1 fino ad a, cosicchè

si abbia $1\times2\times3\times4\ldots\times a+1=b$. Ciò premesso, il numero b non è divisibile per alcun numero minore di a, nè eguale ad a, poichè il valore di b consta di due parti una delle quali è l'unità e l'altra è il prodotto di tutti i numeri dall'1 ad a, e se b fosse divisibile per uno dei fattori di questa parte, anche l'altra parte 1 sarebbe divisibile per quel fattore (54), il che è impossibile. Dunque i fattori primi di b sono maggiori di a, e non esiste il massimo dei numeri primi, cioè le serie de'numeri primi è illimitata.

Il più grande numero che sia stato finora riconosciuto come primo è il seguente: 2147483647, che equivale a $2^{31}-1$. Esso fu annunziato come tale da Fermat. Eulero verificò e confermò più tardi l'asserzione del geometra francese (Fermat, *Opera* e *Vol. dell'Accademia di Berlino pel* 1772 in un sunto di lettera di Eulero a Giovanni Bernoulli).

§ 7. Del minimo comune moltiplo.

86. *Moltipli comuni a due o più numeri.* Il prodotto di due o più numeri è certamente divisibile per ciascuno di essi (45), e quindi è moltiplo comune ai medesimi. Ogni moltiplo poi di questo prodotto sarà ancora moltiplo comune ai numeri stessi (52). Quindi due o più numeri hanno infiniti moltipli comuni. In molte ricerche è importante di saper trovare il minimo di questi moltipli comuni.

87. *Teorema.* Qualunque moltiplo comune a due numeri A e B è pure moltiplo del numero che na-

sce dalla divisione del prodotto di questi pel loro massimo comune divisore.

Infatti sia d il massimo comune divisore di A e B; a e b i quozienti rispettivi de'numeri A e B divisi per d. Si avrà $A=a\times d$ e $B=b\times d$, cosicchè il prodotto $A\times B$, ossia $a\times d\times b\times d$ diviso per d vale $a\times b\times d$. Si tratta adunque di dimostrare che ogni moltiplo comune ad A e B è moltiplo di $a\times b\times d$. Ora ogni moltiplo di A è della forma $k\times A$, ossia $k\times a\times d$, essendo k un numero qualunque intiero, e perchè $k\times a\times d$, sia anche moltiplo di B, ossia di $b\times d$, è facile di vedere che, soppresso il fattore comune d, basta che sia $k\times a$ divisibile per b. Ma a e b sono primi fra di loro perchè quozienti della divisione di A e B rispettivamente pel loro massimo comune divisore; dunque (71) $k\times a$ sarà moltiplo di b se k è divisibile per b, ossia se k è della forma $h\times b$, essendo h un numero qualunque intero. Quindi sostituendo a k quest'espressione $h\times b$, si avrà per la formola abbracciante tutti i moltipli comuni ad A e B

$$h\times a\times b\times d,$$

la quale è evidentemente un moltiplo di $a\times b\times d$, ossia del prodotto $a\times d\times b\times d=A\times B$, diviso per d, che è ciò che era da dimostrare.

88. *Corollario* I. Il minimo valore che possa avere h è l'unità. Dunque il minimo moltiplo comune ai due numeri A e B è $a\times b\times d$. Quindi nasce la seguente regola per trovare il minimo moltiplo comune a due numeri: si divida il prodotto de'due numeri pel loro massimo comune divisore, ed il quoziente sarà il minimo comune moltiplo cercato.

Vogliasi, ad esempio, il minimo comune moltiplo di 30 e 48; il massimo comune divisore di questi

due numeri è 6. Il loro prodotto 30×48 diviso per 6 dà 240, che è il minimo comune moltiplo domandato.

89. *Corollario* 2. Ogni moltiplo comune a due numeri è moltiplo del loro minimo moltiplo comune.

90. *Corollario* 3. Il minimo comune moltiplo di due numeri primi fra di loro è uguale al loro prodotto.

91. Il minimo comune moltiplo di più di due numeri debbe evidentemente essere moltiplo del minimo comune moltiplo di due qualunque di essi. Quindi nasce la seguente regola: per trovare il minimo comune moltiplo di più di due numeri dati si trovi da prima il minimo comune moltiplo di due di essi; poi cerchisi il minimo moltiplo comune al risultato trovato e ad un terzo dei numeri dati, e così si continui fino all'esaurimento di tutti i numeri. L'ultimo risultato che si troverà sarà il minimo comune moltiplo domandato.

92. *Corollario*. Il minimo comune moltiplo di quanti si vogliano numeri primi fra di loro due a due è uguale al loro prodotto, ed è sottomoltiplo di tutti i moltipli comuni agli stessi numeri.

93. La teoria della decomposizione de'numeri in fattori precedentemente stabilita conduce pure ad un altro modo di trovare il minimo comune moltiplo di più numeri. Invero il minimo moltiplo comune a più numeri dati deve evidentemente contenere tutti i fattori primi de'numeri dati, con esclusione di ogni fattore estraneo. Inoltre i fattori primi de'numeri stessi debbono trovarvisi ripetuti il minimo numero possibile di volte. Quindi si troverà il minimo comune moltiplo di più numeri scomponendoli ciascuno ne'suoi fattori primi, e facendo il

prodotto di tutti i fattori differenti trovati, presi ciascuno tante volte quante lo è in quel numero nel quale è più ripetuto. Un esempio varrà a dilucidare la regola. Sia da trovare il minimo moltiplo comune ai numeri 30, 27, 48 e 12. Scomponendoli ne' loro fattori primi si trova $30=2\times3\times5$; $27=3\times3\times3$; $48=2\times2\times2\times2\times3$; $12=2\times2\times3$. I fattori primi differenti sono 2,3,5. Il fattore 2 trovasi maggiormente ripetuto nel terzo numero, ove entra 4 volte; dunque il minimo comune moltiplo cercato deve contenere il fattore 2 ripetuto quattro volte. Per la stessa ragione esso conterrà tre volte il fattore 3 ed una volta il fattore 5; onde sarà eguale a $2^4\times3^3\times5=2160$.

Il numero determinato secondo la regola data è veramente il minimo moltiplo comune ai numeri dati. In vero esso è in primo luogo un moltiplo di ciascuno dei numeri dati, poichè ne contiene tutti i fattori (78); in secondo luogo se anche un solo fattore semplice si sopprimesse nel medesimo, esso cesserebbe di essere divisibile per uno almeno dei numeri dati.

§ 8. Ancora del massimo comune divisore.

94. La teoria della decomposizione de' numeri in fattori primi somministra pure un altro modo di trovare il massimo comune divisore di più numeri dati. Infatti risulta dai principii sopra stabiliti che il massimo comune divisore di più numeri deve essere eguale al prodotto di tutti i fattori primi comuni ai numeri stessi. Per trovarlo basterà dunque

decomporre i numeri dati nei loro fattori primi e fare il prodotto di tutti quelli che saranno comuni a tutti i numeri.

Esempio. Vogliasi il massimo comune divisore dei numeri 1540 e 120. I fattori primi del primo numero sono 2, 2, 5, 7, 11; quelli del secondo sono 2, 2, 2, 3, 5; i fattori comuni ai due numeri sono 2, 2, 5. Il loro prodotto 20 è il massimo comune divisore cercato dei numeri 1540 e 120, risultato d'accordo con quello del n° 65.

95. Il presente metodo per trovare il massimo comune divisore ed il metodo analogo (93) per trovare il minimo comune moltiplo sono eleganti e di facile applicazione se si tratta di numeri facilmente risolvibili ne' loro fattori primi; ma in molti casi la risoluzione de' numeri in fattori è un'operazione lunghissima, impraticabile, e bisogna ricorrere agli altri metodi sopra insegnati.

96. Essendo il massimo comune divisore di più numeri il prodotto dei fattori primi comuni ai medesimi, ne segue: 1° che se in uno de' numeri dati si sopprime colla divisione un fattore che sia primo con tutti gli altri numeri, il massimo comune divisore non viene punto con ciò alterato; 2° che se colla divisione si sopprime in tutti i numeri dati uno stesso fattore, e si trovi poscia il massimo comune divisore, il prodotto di questo moltiplicato pel fattore soppresso sarà il massimo comune divisore cercato de' numeri dati.

Questi due principii possono abbreviare in molti casi la ricerca del massimo comune divisore.

CAPO IV.

FRAZIONI ORDINARIE

§ 1. Preliminari.

97. *Frazioni considerate in astratto.* Si divida l'unità in un numero qualunque di parti eguali; una o più di queste parti costituiscono una frazione. Così se l'unità sarà divisa in cinque parti eguali, ognuna di esse varrà la quinta parte o un quinto dell'unità; due, tre, ecc., di tali parti formeranno due, tre, ecc., quinti. Un quinto, due quinti, tre quinti, ecc., sono altrettante frazioni. La frazione *cinque quinti* equivale all'unità intiera. Nulla limita il numero delle parti di unità formanti la frazione, cosicchè trattandosi di *quinti*, per esempio, la frazione può constare anche di più di cinque quinti. Per conseguenza abbiamo delle *frazioni minori dell'unità*, come due quinti, tre quinti, quattro settimi, e delle *frazioni eguali all'unità* o *maggiori dell'unità*, come cinque quinti, sette settimi, dieci quinti, ventotto quinti, cento settimi, ecc. Le prime diconsi *frazioni proprie*, le altre *frazioni improprie*.

98. Come si vede, per esprimere una frazione si richiedono due numeri, uno de' quali indica in quante parti eguali si debba dividere, o intendere divisa l'unità, l'altro indica quante di queste parti si deb-

bano prendere. Essi diconsi i *termini della frazione.* Il primo, il quale definisce la grandezza delle parti, dicesi *denominatore;* il secondo, il quale determina il numero delle parti da prendere, dicesi *numeratore.*

Nella frazione scritta, questi due numeri si pongono l'uno sopra l'altro, con una lineetta in mezzo. Sopra si scrive il numeratore, sotto il denominatore. Così la frazione *tre quarti* si scrive $\frac{3}{4}$. Il tre è il numeratore, il quattro è il denominatore. La frazione $\frac{11}{5}$ significa *undici quinti*. L'undici è il numeratore, il cinque il denominatore. Ogni volta che il numeratore è minore del denominatore, la frazione è *propria:* se è maggiore, la frazione è *impropria.* Se i due termini sono eguali, la frazione è pure impropria, ed il suo valore è uguale all'unità.

Pertanto una frazione significa l'unità divisa in tante parti eguali quante sono indicate dal denominatore, delle quali si prendono tante quante sono indicate dal numeratore della frazione. Dietro questa definizione dobbiamo stabilire i seguenti teoremi.

99. *Teorema.* Se si moltiplica il numeratore di una frazione per un numero intiero, lasciando intatto il denominatore, il valore della frazione viene moltiplicato per lo stesso numero per cui si moltiplicò il numeratore. Infatti, rimanendo inalterato il denominatore, le parti dell'unità da esso rappresentate conserveranno la loro grandezza primitiva; ma moltiplicando il numeratore, le parti che prendiamo saranno tante volte più numerose quante unità sono nel numero per cui si è moltiplicato il numeratore; dunque il nuovo valore della frazione sarà realmente il valor primitivo moltiplicato per questo stesso numero.

100. *Teorema.* Se si moltiplica il denominatore di

una frazione per un numero, lasciando il numeratore intatto, il valore della frazione viene diviso pel numero stesso per cui si moltiplica il denominatore. Infatti, rimanendo intatto il numeratore, il numero delle parti che prendiamo è sempre lo stesso; ma il denominatore moltiplicato significherà che l'unità viene divisa in un numero di parti tanto maggiore quanto maggiore è il numero per cui si moltiplica il denominatore, e per conseguenza ciascuna parte diventa di altrettanto minore, onde tutta la frazione viene divisa per questo stesso numero.

101. *Teorema.* Dividendo il numeratore di una frazione per un numero, e lasciando il denominatore intatto, il valore della frazione resta diviso per lo stesso numero per cui si divide il numeratore. Infatti la grandezza delle parti non cambia, restando inalterato il denominatore; ma le parti prese diventano tanto meno numerose quante più sono le unità nel numero per cui si divide il numeratore. Dunque, ecc.

102. *Teorema.* Dividendo il denominatore di una frazione per un numero e lasciando il numeratore intatto, il valore della frazione viene moltiplicato pel numero per cui si divide il denominatore. Infatti ciascuna parte dell'unità diventa tante volte maggiore quante sono le unità in questo numero, e prendendo sempre lo stesso numero di parti, perchè il numeratore non varia, si prende realmente un valore tante volte maggiore del primitivo, quante sono le unità del numero per cui si è diviso il denominatore. Dunque, ecc.

103. *Teorema.* Moltiplicando i due termini di una frazione per uno stesso numero, il valore della frazione non si altera. Infatti con questa operazione si

moltiplica e si divide per uno stesso numero il valore della frazione.

104. *Teorema*. Dividendo i due termini di una frazione per uno stesso numero, il valore della frazione non si altera per la stessa ragione del teorema precedente.

105. *Corollari*. Risulta dai precedenti teoremi che: 1º Per moltiplicare una frazione per un numero intero basta (99) moltiplicare il numeratore della frazione per l'intiero, lasciando intatto il denominatore; ovvero basta (102) dividere, quando si può, il denominatore della frazione per l'intero, lasciando intatto il numeratore.

2º Per dividere una frazione per un intero basta (100) moltiplicare il denominatore della frazione per l'intero, lasciando intatto il numeratore; ovvero basta (101) dividere, quando si può, il numeratore della frazione per l'intero, lasciando intatto il denominatore.

Esempi: $\frac{4}{5}\times3=\frac{12}{5}$; $\frac{2}{9}\times3=\frac{2}{3}$;
$\frac{7}{11}\div2=\frac{7}{22}$; $\frac{15}{8}\div5=\frac{3}{8}$.

106. Badino i giovani di non credere poi che, aggiungendo o sottraendo un medesimo numero ai termini di una frazione, la frazione non si alteri, chè sarebbero in errore. Ed in vero, sia la frazione $\frac{5}{7}$; se aggiungiamo ad ambi i termini il numero 11, ad esempio, otteniamo $\frac{16}{18}$, frazione di valore maggiore della data, poichè alla data mancano $\frac{2}{7}$ per fare un'unità, mentre a questa mancano $\frac{2}{18}$ soltanto. Se invece di una frazione propria, avessimo preso per esempio una frazione impropria, avremmo trovato che, aggiungendo ai due termini un medesimo numero, la frazione verrebbe ad avere un valore minore di quello che aveva prima. L'inverso avviene sottraendo ai due termini una medesima quantità.

In un solo caso la frazione non si altera per l'addizione o la sottrazione di una medesima quantità fatta ai due termini, ed è quando i due termini sono eguali e la frazione rappresenta l'unità.

107. *Frazioni concrete.* Una frazione può riferirsi ad una grandezza qualunque, e divenire concreta, come $\frac{4}{5}$ di un pomo, $\frac{7}{11}$ di un campo, $\frac{3}{10}$ di un chilometro, $\frac{2}{9}$ di 11, $\frac{4}{3}$ di $\frac{1}{5}$. Le grandezze *un pomo, un campo, un chilometro, undici, un quinto* sono qui riguardate come formanti un tutto od una unità particolare, della quale deve prendersi tal parte, quale è indicata dalla rispettiva frazione.

108. *Frazione di frazione.* L'ultimo esempio, $\frac{4}{3}$ di $\frac{1}{5}$, costituisce ciò che dicesi una frazione di frazione, ed indica quattro volte la terza parte di $\frac{1}{5}$. Ora la terza parte di $\frac{1}{5}$ vale (100 e 105) $\frac{1}{5\times3}$, ossia $\frac{1}{15}$, e quattro volte $\frac{1}{15}$ fa $\frac{4}{15}$, cosicchè si avrà

$$\frac{4}{3} \text{ di } \frac{1}{5}=\frac{1\times4}{5\times3}=\frac{4\times1}{3\times5}=\frac{4}{15}.$$

Dal che si deduce che il valore di una frazione di frazione è equivalente a quello di una frazione che abbia per numeratore il prodotto de' numeratori, e per denominatore il prodotto dei denominatori delle due frazioni.

109. *Corollario.* Una frazione di un'altra vale quest'ultima frazione della prima, cosicchè sarà

$$\frac{4}{3} \text{ di } \frac{1}{5}=\frac{1}{5} \text{ di } \frac{4}{3}; \quad \frac{3}{7} \text{ di } \frac{8}{9}=\frac{8}{9} \text{ di } \frac{3}{7}; \quad \text{ecc.}$$

110. *Altro corollario.* Una frazione di frazione di frazione, come $\frac{2}{3}$ di $\frac{3}{4}$ di $\frac{4}{5}$, vale una frazione che abbia per numeratore il prodotto de' numeratori e per denominatore il prodotto de' denominatori delle f[illegible]ni date.

111. L'esempio: $\frac{2}{9}$ di 11 (107) significa che bisogna fare dell'11 nove parti eguali e prenderne 2, Ora il nono di 11 vale $\frac{11}{9}$; infatti la nona parte di un numero vale evidentemente la somma delle none parti delle singole sue unità, cosicchè sarà la nona parte di 11 eguale ad undici volte $\frac{1}{9}$, ossia eguale ad $\frac{11}{9}$. Quindi $\frac{2}{9}$ di 11 vale 2 volte $\frac{11}{9}$, ossia $\frac{11\times2}{9}$, ossia ancora $\frac{22}{9}$. Ma $11\times2=2\times11$; per conseguenza:

1° Una frazione di un numero intiero vale una frazione che abbia per numeratore il prodotto del numero intiero pel numeratore della frazione data e per denominatore il denominatore di questa.

2° Una frazione di un numero intiero vale tante volte la frazione quante sono le unità nel numero intiero, cosicchè sarà

$$\frac{5}{7} \text{ di } 18=18 \text{ volte } \frac{5}{7}.$$

112. *Teorema.* Una frazione è uguale al quoziente della divisione del numeratore pel denominatore, ossia $\frac{a}{b}=a\div b$. Risulta infatti dalla dimostrazione precedente che $\frac{11}{9}$ è la nona parte di 11, e in generale $\frac{a}{b}$ è la b^{esima} parte di a. Quindi la lineetta — di separazione tra il numeratore ed il denominatore suolsi frequentemente leggere *diviso per* al pari del segno $\div$; e le due espressioni *cinque dodicesimi*, per esempio, e *cinque diviso per dodici* sono l'indicazione di un medesimo valore numerico.

113. *Corollari.* 1° Ogni numero è uguale ad una frazione che abbia per numeratore il numero stesso e per denominatore l'unità; ossia in generale $a=\frac{a}{1}$

2º Ogni numero può ridursi in una frazione equivalente di dato denominatore. Basta perciò moltiplicare il numero pel denominatore dato ed indicare la divisione del prodotto per questo stesso denominatore. Così abbiamo

$$5=\frac{5\times7}{7}=\frac{5\times11}{11}; \qquad a=\frac{a\times b}{b}.$$

3º Il prodotto di una frazione pel suo denominatore è uguale al numeratore della frazione stessa,

cioè $$\frac{5}{7}\times7=5; \quad \frac{a}{b}\times b=a.$$

114. *Quoziente completo*. Il teorema del num. 112 ci somministra il modo di completare la divisione degli intieri, allorquando questa dà luogo ad un resto. Noi abbiamo già visto (38) come si trovi il quoziente di una divisione *esatto negli intieri*, o, come impropriamente dicono alcuni, *a meno di un'unità;* il teorema precedente ci fa vedere che in ogni caso il quoziente completo di una divisione è uguale al quoziente intero, più una frazione che abbia per numeratore il resto della divisione, e per denominatore il divisore.

115. *Corollario*. Una frazione impropria può sempre ridursi, colla regola precedente, in un numero misto equivalente, cioè in un numero intiero, più una frazione propria. Così si troverà

$$\tfrac{25}{7}=3+\tfrac{4}{7}; \quad \tfrac{38}{3}=12+\tfrac{2}{3}; \quad \tfrac{12}{4}=3.$$

Viceversa, un numero intero, più una frazione si riduce in una frazione impropria equivalente, moltiplicando l'intiero pel denominatore della frazione, aggiungendo al prodotto il numeratore della frazione e prendendo la somma che ne risulta per numera-

tore della frazione cercata, la quale avrà per denominatore il denominatore della frazione data. Così si troverà $3+\frac{4}{7}=\frac{3\times7+4}{7}=\frac{25}{7}$; $a+\frac{b}{c}=\frac{a\times c+b}{c}$.

§ 2. Riduzione delle frazioni ai minimi termini.

116. Dai due teoremi dei numeri 103 e 104 si scorge che il valore di una frazione può essere espresso in una infinità di modi differenti.

Così abbiasi la frazione $\frac{8}{12}$; dividendo i due termini per 2, il valore di essa non cambia, e si ottiene l'espressione $\frac{4}{6}$ equivalente alla precedente. Dividendo ancora per 2 i termini di questa, si ha $\frac{2}{3}$. Moltiplicando per uno stesso numero qualunque i due termini della frazione proposta, si trasforma essa in altre equivalenti, di termini però diversi da quelli della prima. Di tutte queste frazioni aventi termini differenti e rappresentanti una medesima quantità, una è più semplice di tutte, cioè ha termini minori che tutte le altre, e non si potrebbe ulteriormente semplificare. L'operazione per cui da una qualunque di queste frazioni si passa alla più semplice si dice *riduzione delle frazioni ai minimi termini.*

117. *Regola.* Per fare questa riduzione si dividono ambi i termini della frazione proposta pel loro massimo comune divisore. Se i termini della frazione sono numeri primi fra di loro, la frazione è già ridotta ai minimi termini, e si dice ed è *irreduttibile.*

Infatti se due frazioni a termini intieri $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ sono equivalenti, ed i termini a e b della prima sono

primi fra di loro, i termini c e d della seconda non possono essere minori di a e b rispettivamente, anzi sono necessariamente lo stesso moltiplo di questi, poichè dall'eguaglianza

$$\frac{c}{d}=\frac{a}{b},$$

col moltiplicare ambi i membri per d, si ricava (113, 3°)

$$c=\frac{a\times d}{b}.$$

Ma c è un numero intiero; perciò $a\times d$ dev'essere divisibile per b; ed essendo a primo con b, sarà (71) d eguale a b, o moltiplo di b. Chiamando q il quoziente di $d \div b$, si avrà (40)

$$d=b\times q \quad \text{e} \quad c=\frac{a\times b\times q}{b}=a\times q,$$

il che fa appunto vedere che c e d sono rispettivamente lo stesso moltiplo q di a e di b.

Allorquando nei termini della frazione si scorgono a prima vista fattori comuni, la frazione si semplifica col dividere ambi i termini suoi per questi fattori. Frequentemente, colla soppressione successiva di alcuni fattori comuni ai due termini e facilmente riconoscibili, si riduce la frazione alla sua più semplice espressione. Così avviene, per esempio, nella frazione $\frac{36}{48}$, la quale dividendo successivamente i suoi termini per 2, 2 e 3 si riduce rispettivamente a $\frac{18}{24}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{3}{4}$.

§ 3. Riduzione delle frazioni allo stesso denominatore.

118. Per ridurre due frazioni allo stesso denominatore senza alterare il loro valore, si moltipli-

cano i due termini della prima pel denominatore della seconda e i due termini della sèconda pel denominatore della prima. Infatti con questa doppia operazione: 1° non si altera il valore delle due frazioni, venendo moltiplicati i due termini di ciascuna per un medesimo numero; 2° il denominatore sarà eguale nelle due frazioni che si otterranno, essendo esso nell'una e nell'altra il prodotto dei denominatori delle frazioni date.

Esempio. Siano da ridurre allo stesso denominatore le due frazioni seguenti:

$$\frac{7}{11} \text{ e } \frac{3}{5}$$

si otterranno le frazioni

$$\frac{35}{55} \text{ e } \frac{33}{55}$$

rispettivamente equivalenti alle precedenti ed aventi lo stesso denominatore.

Per ridurre più frazioni allo stesso denominatore si moltiplicano i due termini di ciascuna frazione pel prodotto de'denominatori di tutte le altre frazioni. Il denominatore comune sarà il prodotto di tutti i denominatori delle frazioni date. La ragione di questa regola è la stessa che quella data per due frazioni.

Esempio. Siano da ridurre allo stesso denominatore le frazioni

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{7},$$

si otterranno le frazioni corrispondenti

$$\frac{105}{210},\ \frac{126}{210},\ \frac{140}{210},\ \frac{120}{210}.$$

Per ottenere questo risultato si sono moltiplicati i due termini della prima frazióne pel prodotto 105 de'denominatori 5, 3, 7 delle altre; i due termini della seconda pel prodotto 42 de'denominatori 2,

3, 7 delle altre; i due termini della terza pel prodotto 70 dei denominatori 2, 5, 7 delle altre; finalmente i due termini dell'ultima pel prodotto 30 de'denominatori 2, 5, 3 delle altre frazioni.

Allorquando le frazioni da ridurre allo stesso denominatore sono molte e i denominatori loro alquanto grandi, le frazioni ridotte avranno in generale termini grandissimi. Ma avviene spesso che le frazioni si possano ridurre ad un denominatore comune minore di quello che darebbe la regola generale sopra stabilita.

Un caso particolarissimo di riduzione è quello in cui una delle frazioni date ha un denominatore che è moltiplo del denominatore di ciascun'altra frazione, come avviene nell'esempio seguente:

$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{9},\ \frac{3}{4},\ \frac{11}{36},\ \frac{7}{24},\ \frac{37}{72}.$$

Il denominatore 72 essendo moltiplo di tutti gli altri denominatori, tutte le frazioni date si possono ridurre a questo denominatore 72. Basta per ciò moltiplicare i due termini di ciascuna di esse pel quoziente che si ottiene dividendo il denominatore moltiplo 72 pel denominatore della frazione su cui si opera. Così nell'esempio arrecato divido 72 per 3 (denominatore della prima frazione), e trovo per quoziente 24. Moltiplicherò adunque i due termini della prima frazione per 24. Egualmente moltiplicherò i due termini della seconda frazione per 8 che è il quoziente di 72 diviso per 9 (denominatore della seconda frazione). Allo stesso modo si opera sulle altre frazioni e si ottengono così, invece delle frazioni date, le seguenti rispettivamente equivalenti alle medesime.

$$\frac{24}{72},\ \frac{16}{72},\ \frac{54}{72},\ \frac{22}{72},\ \frac{21}{72},\ \frac{37}{72}.$$

Seguendo la regola generale, si sarebbe ottenuto per denominatore comune il numero $3 \times 9 \times 4 \times 36 \times 24 \times 72$, ossia 6718464.

Talvolta uno de' denominatori delle frazioni date diventa moltiplo di tutti gli altri moltiplicandolo semplicemente per 2 o per 3, ed in questo caso può anche semplificarsi l'operazione, come avviene nell'esempio seguente:

$$\frac{4}{5},\ \frac{2}{3},\ \frac{7}{30},\ \frac{9}{20}.$$

Il denominatore 30 della terza frazione moltiplicato per 2 diventa moltiplo di ciascuno degli altri denominatori. Quindi le frazioni date si possono ridurre tutte al denominatore 60; e per ottenere questo risultato basterà moltiplicare rispettivamente i due termini di ciascuna di esse pe' seguenti numeri 12, 20, 2, 3, i quali sono i quozienti della divisione di 60 per ciascuno dei denominatori dati. Ciò fatto, si avranno, invece delle date, le seguenti frazioni:

$$\frac{48}{60},\ \frac{40}{60},\ \frac{14}{60},\ \frac{27}{60}.$$

119. Infiniti sono i numeri che possono servire di denominatore comune a due o più frazioni date. Infatti ridotte le frazioni date allo stesso denominatore con uno de' metodi precedenti, egli è chiaro che se, dopo tale riduzione, moltiplicheremo ambi i termini di tutte le frazioni per un medesimo numero arbitrariamente scelto nell'infinità de' numeri, le frazioni senza cambiare di valore, potranno cambiare di termini in infiniti modi, conservando però sempre un denominatore comune.

È pregio dell'opera il saper trovare in ogni caso il minimo di tutti questi comuni denominatori. Ora è evidente che, supponendo le frazioni date già ridotte

ai minimi termini, nessun numero può essere loro comune denominatore senza che sia moltiplo di ciascuno de' loro denominatori (117). Converrà dunque cercare il minimo comune moltiplo dei denominatori delle frazioni date.

Siano le frazioni $\frac{7}{30}$, $\frac{2}{27}$, $\frac{5}{48}$, $\frac{1}{12}$ già ridotte ai minimi termini. Il minimo comune moltiplo de' loro denominatori è (93) 2160. Sarebbe dunque impossibile ridurre le frazioni precedenti ad un denominatore comune minore di 2160. Per ridurre le frazioni date a questo denominatore minimo 2160, osservo che se divideremo il 2160 successivamente pei denominatori delle frazioni date, troveremo i quozienti rispettivi 72, 80, 45, 180, pei quali moltiplicando rispettivamente i numeratori delle frazioni date, e scrivendo sotto ai prodotti il denominatore comune 2160, si otterrà il risultato cercato nelle frazioni seguenti:

$$\frac{504}{2160}, \frac{160}{2160}, \frac{225}{2160}, \frac{180}{2160}.$$

Applicando la regola generale, invece di 2160, si sarebbe trovato per denominatore comune il numero 466560.

120. Si possono più frazioni ridurre allo stesso numeratore. Basta per ciò moltiplicare i due termini di ciascuna di esse pel prodotto de' numeratori di tutte le altre frazioni. La riduzione delle frazioni allo stesso numeratore dà luogo alle medesime semplificazioni che la riduzione allo stesso denominatore.

121. La riduzione di due o più frazioni allo stesso denominatore serve al paragone del valore relativo delle frazioni stesse; giacchè è difficile talvolta conoscere a prima vista la grandezza relativa delle frazioni che non abbiano lo stesso numeratore o denominatore.

Di due frazioni aventi lo stesso denominatore è più grande quella che ha maggior numeratore; e di due frazioni aventi lo stesso numeratore è più grande quella che ha minor denominatore.

§ 4. Addizione delle frazioni ordinarie.

122. Nell'addizione delle frazioni ordinarie distinguiamo due casi: 1° quello in cui le frazioni da sommare hanno lo stesso denominatore; 2° quello in cui hanno denominatori differenti. Nel primo caso si sommano tra di loro i numeratori delle frazioni date, e si scrive sotto alla loro somma il denominatore comune. La frazione che ne risulterà sarà la somma cercata. Nel secondo caso si riducono le frazioni allo stesso denominatore, poi si fa l'addizione come nel primo caso.

Esempi. Così si avrà:

$$\frac{3}{11}+\frac{7}{11}=\frac{10}{11};$$
$$\frac{4}{5}+\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{7}{5}=1+\frac{2}{5};$$
$$\frac{8}{8}+\frac{2}{7}=\frac{21}{56}+\frac{16}{56}=\frac{37}{56}.$$

§ 5. Sottrazione.

123. Nella sottrazione delle frazioni ordinarie si distinguono due casi: 1° quando le due frazioni minuendo e sottraendo hanno lo stesso denominatore; 2° quando non l'hanno. Nel primo caso si sottrae il numeratore della frazione sottraenda dal numeratore della frazione minuenda, e sotto al resto che si ot-

tiene, si scrive il denominatore comune alle due frazioni. La frazione che ne risulterà sarà il resto cercato. Nel secondo caso si riducono le due frazioni allo stesso denominatore, poi si opera come nel primo caso.

Esempi. Così si avrà:

$$\frac{7}{13}-\frac{2}{13}=\frac{5}{13}$$
$$\frac{4}{5}-\frac{3}{7}=\frac{28}{35}-\frac{15}{35}=\frac{13}{35}.$$

Se si avessero più frazioni, parte col segno *più*, parte col segno *meno*, da ridurre in una sola equivalente al complesso delle date, si farebbe la somma di tutte le frazioni affette dal segno $+$, e separatamente la somma di tutte le frazioni affette dal segno $-$, e si sottrarrebbe la seconda somma dalla prima.

§ 6. Moltiplicazione.

124. Le regole della moltiplicazione delle frazioni sono fondate sulla definizione di quest' operazione. Ora nel numero 26 ho dato due definizioni della moltiplicazione dei numeri intieri le quali si possono benissimo applicare alla moltiplicazione delle frazioni. Invero, quando diciamo che si deve prendere il moltiplicando tante volte, quante unità sono nel moltiplicatore, se questo è una frazione dell' unità, ciò significa che bisogna prendere il moltiplicando una frazione di volta. Come si vede, i matematici attribuiscono al vocabolo *moltiplicare* un significato che non corrisponde alla sua etimologia. Così sia da moltiplicare il numero 12 per $\frac{1}{2}$; bisognerà prendere *una mezza volta* 12, ossia la metà di 12. Egualmente

moltiplicare il 12 per $\frac{3}{4}$ significa prendere o ripetere il 12 *tre quarti di volta*.

Meglio ancora si applica alle frazioni la seconda definizione del num. 26, che chiama moltiplicazione quella operazione per cui dati due numeri, *moltiplicando* e *moltiplicatore*, se ne cerca un terzo, *prodotto*, che sia formato col primo, come il secondo è formato coll'unità. Così nell'esempio del numero 12 da moltiplicare per $\frac{3}{4}$, siccome la frazione $\frac{3}{4}$ è 3 volte la quarta parte dell'unità, così bisognerà trovare un numero che sia 3 volte la quarta parte di 12. In generale una quantità qualunque intiera o frazionaria si moltiplica per una frazione $\frac{a}{b}$ prendendo a volte la b^{esima} parte della quantità stessa.

125. Nella moltiplicazione delle frazioni distinguerò tre casi. 1° *Caso. Moltiplicazione di una frazione per un intiero.* Le regole relative a questo caso sono già esposte nel numero 105. Si può dimostrare la prima di queste regole anche nel modo seguente. Sia da moltiplicare la frazione $\frac{7}{12}$, per esempio, per 3. Ciò significa che bisogna prendere tre volte la frazione $\frac{7}{12}$, ossia sommare insieme tre frazioni eguali a $\frac{7}{12}$. Il risultato sarà evidentemente eguale a

$$\frac{7}{12}+\frac{7}{12}+\frac{7}{12}=\frac{7\times 3}{12}. \text{ Dunque, ecc.}$$

126. 2° *Caso. Moltiplicazione di un intiero per una frazione.* Per moltiplicare un intiero per una frazione basta moltiplicare il numeratore della frazione per l'intiero, e lasciare intatto il denominatore, cosicchè sarà:

$$5\times\frac{4}{21}=\frac{4\times 5}{21};\quad 7\times\frac{2}{15}=\frac{2\times 7}{15};\quad a\times\frac{b}{c}=\frac{b\times a}{c}.$$

Infatti stando alla seconda definizione del numero 124, moltiplicare, per esempio, 5 per $\frac{4}{21}$ vuol dire trovare un numero formato col 5 come la frazione $\frac{4}{21}$ è formata coll'unità. Ma $\frac{4}{21}$ vale 4 volte la 21^{esima} parte dell'unità; dunque il prodotto cercato vale 4 volte la 21^{esima} parte di 5. Ora la 21^{esima} parte di 5 è $\frac{5}{21}$, e 4 volte $\frac{5}{21}$ fa $\frac{4 \times 5}{21}$, il che era da dimostrare.

In generale $a \times \frac{b}{c}$ significa b volte la c^{esima} parte di a, la quale è $\frac{a}{c}$; ma b volte $\frac{a}{c}$ fa $\frac{a \times b}{c}$; dunque, ecc.

127. 3° *Caso. Moltiplicazione di una frazione per un'altra.* Per moltiplicare fra di loro due frazioni si moltiplicano fra di loro i numeratori e fra di loro i denominatori delle frazioni date; il prodotto dei numeratori sarà il numeratore del prodotto cercato, ed il prodotto dei denominatori sarà il denominatore del prodotto. Così si avrà:

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}; \quad \frac{4}{7} \times \frac{3}{8} = \frac{4 \times 3}{7 \times 8} = \frac{12}{56}; \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}.$$

Infatti (124) moltiplicare, per esempio, $\frac{2}{3}$ per $\frac{4}{5}$ vuol dire prendere quattro volte il quinto di due terzi. Ma (105) il quinto di $\frac{2}{3}$ è $\frac{2}{3 \times 5}$ e 4 volte questa frazione (125) fa $\frac{2 \times 4}{3 \times 5}$, il che era da dimostrare.

128. Il terzo caso della moltiplicazione abbraccia il secondo. Infatti ogni numero intiero (113) vale una frazione che abbia per numeratore lo stesso numero

intiero e per denominatore l'unità. Dunque si avrà in generale:

$$a\times\frac{b}{c}=\frac{a}{1}\times\frac{b}{c}=\frac{a\times b}{1\times c}=\frac{a\times b}{c}.$$

129. *Corollario.* Risulta dalle dimostrazioni precedenti che anche nella moltiplicazione delle frazioni sta il principio dimostrato pei numeri intieri, consistente in ciò che il prodotto non varia col variare dell'ordine dei fattori.

130. Si può osservare che, essendo il moltiplicatore una frazione propria, il prodotto è più piccolo del moltiplicando, il che in apparenza è contrario all'idea che siamo soliti a farci della moltiplicazione. Ma bisogna ricordare che moltiplicare un numero per un altro vuol dire prendere (evitiamo nel caso delle frazioni la parola *ripetere*) tante volte il primo numero quante unità sono nell'altro. Ora se quest'ultimo numero non contiene che parti dell' unità, e vale, per esempio, $\frac{1}{3}$, bisognerà prendere un terzo di volta il moltiplicando, ossia prenderne la terza parte.

131. Il prodotto di più fattori frazionari si trova dividendo il prodotto dei numeratori pel prodotto dei denominatori dei fattori stessi.

Nei casi speciali prima di fare questi due prodotti conviene sopprimere tutti i fattori che appariscono comuni ai numeratori ed ai denominatori dati. Così nell'esempio $\frac{4}{15}\times\frac{5}{12}\times\frac{3}{4}=\frac{4\times5\times3}{15\times12\times4}$; prima di eseguire le moltiplicazioni, si possono sopprimere nei due termimi della frazione i fattori comuni 4, 5 e 3, e si trova tosto per risultato $\frac{1}{12}$.

132. Ognuno vede che la moltiplicazione di una quantità per una frazione corrisponde esattamente

alle frazioni concrete (107), e che le regole del presente § sono pienamente d'accordo coi principii dei numeri (109, 110 e 111).

§ 7. Divisione.

133. Le due definizioni della divisione date per i numeri intieri negli articoli 35 e 40 (*pag.* 44 e 54) si applicano pure alle frazioni, e ciascuna di esse può condurre ad una regola pratica per la divisione di queste. Per maggior semplicità mi atterrò alla definizione del n. 35.

Come nella moltiplicazione distinguerò qui pure tre casi:

1º Dividere una frazione per un numero intero; 2º dividere un intero per una frazione; 3º dividere una frazione per un'altra.

134. 1º *Caso*. La regola relativa a questo caso è già stata enunciata e dimostrata nel n. 105.

135. 2º *Caso*. Per dividere un intero per una frazione, si moltiplica l'intero pel denominatore della frazione e si divide il prodotto pel numeratore della frazione, il che equivale a dire che si moltiplica l'intero per la frazione divisore rovesciata. Così si avrà

$$7 \div \frac{8}{13} = \frac{7 \times 13}{8} = \frac{91}{8} = 11 + \frac{3}{8}.$$

Infatti se dividiamo il 7 pel numeratore 8, otteniamo $\frac{7}{8}$; ma il divisore $\frac{8}{13}$ è 13 volte minore di 8: dunque starà 13 volte di più che 8 nel dividendo 7. Onde il quoziente $\frac{7}{8}$ è 13 volte più piccolo del vero quoziente cercato. Per ridurlo al vero si moltipli-

cherà per 13 e si avrà $\frac{7\times 13}{8}$, il che era da dimostrare. Così si avrà pure

$$5 \div \frac{11}{12} = \frac{5\times 12}{11} = \frac{60}{11} = 5 + \frac{5}{11};$$

$$7 \div \frac{4}{5} = \frac{7\times 5}{4} = \frac{35}{4} = 8 + \frac{3}{4}.$$

136. 3° *Caso*. Per dividere una frazione per un'altra si moltiplica il numeratore del dividendo pel denominatore del divisore, ed il prodotto sarà il numeratore della frazione quoziente; si moltiplica poscia il denominatore del dividendo pel numeratore del divisore, ed il prodotto sarà il denominatore della frazione quoziente. Ciò vale quanto dire che si moltiplica la frazione dividendo per la frazione divisore rovesciata. Così si avrà

$$\frac{3}{5} \div \frac{4}{7} = \frac{3}{5} \times \frac{7}{4} = \frac{3\times 7}{5\times 4} = \frac{21}{20} = 1 + \frac{1}{20}.$$

Infatti se divido la frazione $\frac{3}{5}$ per 4 ottengo $\frac{3}{5\times 4}$; ma non doveva dividere per 4, bensì per $\frac{4}{7}$, ossia per una quantità 7 volte minore di 4, la quale starà per conseguenza 7 volte di più che 4 nel dividendo, e mi darà un quoziente 7 volte maggiore di $\frac{3}{5\times 4}$, ossia mi darà $\frac{3\times 7}{4\times 5}$, che è ciò che si voleva dimostrare.

Per la stessa ragione avremo

$$\frac{2}{3} \div \frac{4}{9} = \frac{2\times 9}{3\times 4} = \frac{18}{12} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2};$$

$$\frac{5}{6} \div \frac{9}{12} = \frac{5\times 12}{6\times 9} = \frac{60}{54} = \frac{30}{27} = \frac{10}{9} = 1 + \frac{1}{9}.$$

137. Ogni volta che il divisore è una frazione propria, il quoziente è maggiore del dividendo. Infatti

siccome per fare la divisione si moltiplica il dividendo per la frazione rovesciata, la quale diventa in tal caso maggiore dell'unità, così si prenderà sempre più che una volta il dividendo.

Ogni volta poi che il divisore è maggiore del dividendo, il quoziente è una frazione propria, ed ogni volta che il divisore è minore del dividendo il quoziente è una frazione impropria, il che è una conseguenza ed una conferma della definizione della divisione.

138. Se si avessero da dividere l'una per l'altra due frazioni aventi lo stesso denominatore, basterebbe dividere il numeratore della frazione dividendo pel numeratore della frazione divisore. Infatti sia l'esempio

$$\frac{3}{11} \div \frac{7}{11} = \frac{3 \times 11}{7 \times 11} = \frac{3}{7}.$$

Si vede che il fattore comune 11 scomparisce dai due termini del prodotto.

139. A questo medesimo risultato si arriva immediatamente e senza far uso delle dimostrazioni precedenti, ricordando ed applicando il principio del num. 46. Invero il quoziente di $\frac{3}{11}$ per $\frac{7}{11}$ non alterandosi col moltiplicare il dividendo e il divisore per lo stesso numero 11, si scorge tosto che $\frac{3}{11} \div \frac{7}{11} = 3 \div 7 = \frac{3}{7}$. Da questo caso particolare della divisione delle frazioni è facile dedurre la dimostrazione delle regole de' numeri 134, 135, e 136. Ecco come:

1° Sia da dividere una frazione per un intero; per esempio $\frac{4}{5} \div 7$. Dico che il quoziente è $\frac{4}{5 \times 7}$. Invero (113) abbiamo $7 = \frac{7 \times 5}{5}$; e quindi

$$\frac{4}{5} \div 7 = \frac{4}{5} \div \frac{7 \times 5}{5} = \frac{4}{7 \times 5} = \frac{4}{5 \times 7}.$$

2º Sia da dividere un intero per una frazione; per esempio $3 : \frac{9}{11}$. Dico che il quoziente è $\frac{3 \times 11}{9}$. Invero ragionando allo stesso modo che nel primo caso si trova

$$3 : \frac{9}{11} = \frac{3 \times 11}{11} : \frac{9}{11} = \frac{3 \times 11}{9}.$$

3º Finalmente sia da dividere una frazione per un'altra: per esempio $\frac{4}{7} : \frac{5}{13}$. Il quoziente sarà $\frac{4 \times 13}{7 \times 5}$. Invero riducendo allo stesso denominatore, abbiamo

$$\frac{4}{7} : \frac{5}{13} = \frac{4 \times 13}{7 \times 13} : \frac{7 \times 5}{7 \times 13} = \frac{4 \times 13}{7 \times 5}.$$

140. Ove si voglia preferire la definizione del numero 40, che dice *la divisione* quell'operazione per cui dato un prodotto ed un suo fattore, si trova l'altro fattore, allora ecco il ragionamento con cui si arriva a stabilire le regole precedenti. Sia da dividere il numero qualunque intiero o frazionario a per $\frac{3}{4}$; bisognerà trovare un numero, il quale, moltiplicato per $\frac{3}{4}$, dia per prodotto a (poco importa che si dica di moltiplicare il numero cercato per $\frac{3}{4}$, ovvero $\frac{3}{4}$ pel numero cercato, poichè abbiamo già dimostrato (129) che l'ordine de' fattori non muta il prodotto). Pertanto i $\frac{3}{4}$ del numero cercato dovranno equivalere ad a, e perciò $\frac{1}{4}$ del medesimo numero varrà il terzo di a, ossia $a \times \frac{1}{3}$, e perciò ancora il numero cercato varrà quattro volte $a \times \frac{1}{3}$, ossia $a \times \frac{1}{3} \times 4 = a \times \frac{4}{3}$.

Dunque qualunque sia il dividendo, se il divisore è una frazione, si troverà il quoziente moltiplicando il dividendo per la frazione divisore rovesciata.

§ 8. Numeri misti.

141. Nel caso in cui si abbiano da eseguire le operazioni dell'aritmetica sopra numeri composti di una parte intiera e di una parte frazionaria, detti *numeri misti*, come sarebbero $2+\frac{1}{5}$; $5+\frac{7}{11}$; $3+\frac{4}{9}$, ecc., si potrannno ridurre tali numeri in una sola quantità frazionaria (115), e poi si opererà sopra di essi come sulle frazioni. Così si troverà:

$$2+\frac{1}{5}+5+\frac{2}{3}=\frac{11}{5}+\frac{17}{3}=\frac{33}{15}+\frac{85}{15}=\frac{118}{15}=7+\frac{13}{15}.$$

$$3+\frac{3}{7}-(2+\frac{1}{3})=\frac{24}{7}-\frac{7}{3}=\frac{72}{21}-\frac{49}{21}=\frac{23}{21}=1+\frac{2}{21}.$$

$$(1-\frac{1}{5})\times(3+\frac{1}{4})=\frac{4}{5}\times\frac{13}{4}=\frac{13}{5}=2+\frac{3}{5}.$$

$$(3+\frac{2}{9})\div(5-\frac{1}{7})=\frac{29}{9}\div\frac{34}{7}=\frac{203}{306}.$$

Ricordiamo sempre che le parentesi indicano che i segni che precedono o seguono abbracciano l'intiera quantità contenutavi.

Nel 1^0 de' precedenti esempi, seguendo la regola del num. 115, si cominciò a ridurre $2+\frac{1}{5}$ in $\frac{11}{5}$, e $5+\frac{2}{3}$ in $\frac{17}{3}$, si sono poscia ridotte le due frazioni ottenute allo stesso denominatore per sommarle.

Nel 2^0 si ridusse $3+\frac{3}{7}$, formante il minuendo, in $\frac{24}{7}$, e la quantità $2+\frac{1}{3}$, formante il sottraendo, in $\frac{7}{3}$; poi si ridussero le due frazioni allo stesso denominatore per sottrarre la seconda dalla prima.

Nel 3^0 si ridusse il fattore $1-\frac{1}{5}$ in $\frac{4}{5}$, e l'altro fattore $3+\frac{1}{4}$ in $\frac{13}{4}$, poi si eseguì la moltiplicazione.

Nel 4^0 finalmente si ridusse il dividendo $3+\frac{2}{9}$ in $\frac{29}{9}$, ed il divisore $5-\frac{1}{7}$ in $\frac{34}{7}$, poi si eseguì la divisione.

142. Le medesime operazioni sui numeri misti si possono fare per parti (34). Così nell'addizione si

potrebbero sommare separatamente i numeri interi e le frazioni, estraendo poscia (115) dalla somma di queste gli interi, che vi possono essere contenuti, per aggiungerli alla somma degli interi, oppure riducendo in frazione la somma degli interi e riunendo tale frazione colla somma delle frazioni. Così si troverebbe nell'esempio sopra arrecato

$$2+\frac{1}{5}+5+\frac{2}{3}=7+\frac{1}{5}+\frac{2}{3}=7+\frac{13}{15}=\frac{118}{15}.$$

Lo stesso metodo applicato alla sottrazione ci porge per l'esempio sopra dato:

$$(3+\frac{3}{7})-(2+\frac{1}{3})=1+\frac{3}{7}-\frac{1}{3}=1+\frac{2}{21}=\frac{23}{21}.$$

Nella moltiplicazione conviene moltiplicare successivamente tutte le parti del moltiplicando per ciascuna parte del moltiplicatore. Così si avrà

$$(2+\frac{2}{5})\times(3+\frac{4}{7})=2\times3+\frac{2}{5}\times3+2\times\frac{4}{7}+\frac{2}{5}\times\frac{4}{7}=8+\frac{4}{7}.$$

Nella divisione finalmente conviene ridurre il divisore in una frazione unica ordinaria, e dividere successivamente tutte le parti del dividendo per questa frazione come segue:

$$(3+\frac{7}{8})\div(5+\frac{2}{9})=(3+\frac{7}{8})\div\frac{47}{9}=\frac{3\times9}{47}+\frac{7\times9}{8\times47}=\frac{279}{376}.$$

143. Accade talvolta di dover ridurre una frazione in un'altra equivalente di determinato denominatore.

Si voglia, per esempio, ridurre la frazione $\frac{1}{2}$ in un'altra che abbia per denominatore 28. Il denominatore 2 della frazione data moltiplicato per 14, ossia pel quoziente di 28 per 2, dà evidentemente 28. Dunque per ottenere il risultato domandato basta moltiplicare i due termini della frazione data per il quoziente della divisione del denominatore imposto

pel denominatore della frazione data. Anzi il prodotto del denominatore per questo quoziente essendo eguale al denominatore imposto, basterà eseguire la moltiplicazione sul numeratore. Così se si volesse ridurre la frazione $\frac{3}{5}$ in trentacinquesimi, si otterrebbe colla regola enunciata $\frac{21}{35}$. Ma avviene più frequentemente che il quoziente del nuovo denominatore diviso pel denominatore primitivo non sia un numero intero. Allora se la frazione data è ridotta alla sua più semplice espressione, il numeratore della nuova frazione che cerchiamo non potrà più essere un numero intero.

Se il problema è di tale natura che basti ottenere per quella frazione un valore approssimato si trascurerà, nel numeratore che si troverà, il di più degli interi, o meglio, si prenderà per numeratore il numero intero più prossimo al vero valore, sia in più, sia in meno, e si avrà l'approssimazione voluta.

Si voglia, ad esempio, ridurre la frazione $\frac{4}{7}$ in quarantesimi; bisognerà moltiplicare i due termini per $40 \div 7$, ossia per 5 più 5 settimi. Con ciò il denominatore diventa 40, ed il numeratore 22 più 6 settimi, il quale numero essendo più prossimo a 23 che a 22, diremo che la frazione data vale $\frac{23}{40}$ prossimamente. L'errore commesso non arriva a un mezzo quarantesimo, ossia è minore di un ottantesimo.

Operando in tale modo, in ogni caso, l'errore che si commette è minore dell'unità divisa pel doppio del nuovo denominatore.

Il vero valore dell'errore commesso è sempre eguale, in più o in meno, alla frazione che si trascura nel numeratore divisa pel nuovo denominatore.

CAPO V.

FRAZIONI DECIMALI

§ 1. Preliminari.

144. *Frazioni decimali* diconsi quelle il cui denominatore è un numero che consta della cifra 1 seguita da zeri. Così $\frac{3}{10}$, $\frac{19}{100}$, $\frac{128}{1000}$ e simili sono frazioni decimali. Esse scrivonsi però diversamente dalle frazioni ordinarie precedentemente definite.

Ricordando che nel numero scritto le cifre rappresentano valori di dieci in dieci volte minori a misura che si trasportano dalla sinistra verso la destra, e che l'ultima cifra a destra rappresenta le unità semplici, egli è chiaro che, se volessimo continuare questa legge di diminuzione anche a destra delle unità semplici, una cifra scritta a destra di queste dovrebbe rappresentare le decime parti dell'unità, ossia un valore dieci volte minore di quello che rappresenterebbe se fosse nella sede delle unità. Ma allora per distinguere quale sia la cifra che rappresenta le unità di primo ordine, si richiede un segnale, e per questo si fa un punto elevato tra la cifra delle unità e quella che la segue a destra (*), il che basta per far conoscere che quest'ultima cifra rappresenterà i *decimi* dell'unità. Così il numero 13·5 si leggerebbe *tredici*

(*) Vedasi l'Avvertenza a pag. 3.

intieri e *cinque decimi*; il numero 9·8 si leggerebbe *nove intieri* e *otto decimi*. Allorchè mancano gli intieri basta scrivere il *punto* a sinistra della parte frazionaria. Così la frazione *sette decimi* si scrive ·7; la frazione *nove decimi* si scrive ·9.

Continuando la stessa norma, una cifra scritta a destra de'decimi deve rappresentare la decima parte de'decimi, ossia i *centesimi*; la cifra scritta a destra de'centesimi rappresenta la decima parte dei centesimi, ossia i *millesimi*; la cifra a destra de'millesimi rappresenta la decima parte de'millesimi, ossia i *deci-millesimi* di unità, e le cifre che seguono quest'ultima rappresentano per ordine *i cento-millesimi, i milionesimi, i deci-milionesimi, i cento-milionesimi, i bilionesimi, i deci-bilionesimi, i cento-bilionesimi, i trilionesimi*, e così di seguito.

In queste frazioni i valori delle cifre procedono adunque colla medesima legge che nei numeri intieri, cosicchè dieci delle unità rappresentate da una qualunque di queste cifre fanno una delle unità rappresentate dalla cifra che la precede a sinistra.

145. Dietro le cose dette sarà facile leggere il seguente numero 5·708 che vale cinque intieri, sette decimi, zero centesimi, otto millesimi. Ogni decimo valendo dieci centesimi, invece di sette decimi e zero centesimi, si potrà leggere settanta centesimi, ed ogni centesimo valendo 10 millesimi, invece di 70 centesimi e 8 millesimi, si potrà leggere settecento e otto millesimi. Cosicchè il numero proposto 5·708 si leggerà più speditamente cinque intieri e settecento e otto millesimi. Questo principio è generale, e per leggere un numero decimale frazionario qualsivoglia si legge sempre prima la parte intiera secondo le norme sopra stabilite, e quindi

si legge il numero che sta a destra del punto, come se fosse un numero intiero, pronunciando infine quell'ordine di unità frazionaria che viene espresso dall'ultima cifra. I seguenti numeri frazionarii decimali: ˙7101 ; 7˙009; 412˙00105701; 1˙02, si leggeranno per ordine così: sette mila cento e uno deci-millesimi; sette intieri e nove millesimi; quattrocento e dodici intieri, cento e cinque mila settecento e uno cento-milionesimi; un intiero e due centesimi.

146. *NB.* Ogni numero frazionario decimale componesi di due parti, una intiera ed una frazionaria, potendo la prima essere anche eguale a zero. Le cifre a destra del punto componenti la parte frazionaria soglionsi dire *cifre decimali.*

147. La regola sopra esposta per la lettura d'una frazione decimale si può accomodare facilmente alla scrittura della frazione stessa invertendo alcuni termini. Scritta la parte intera ed il punto di separazione, si scriverà a destra del punto il numeratore della frazione decimale in modo, che l'ultima sua cifra si trovi nella sede, nella quale sono rappresentate le unità frazionarie di quell'ordine, che viene espresso da chi detta il numero. Si osservi per ciò, che il denominatore della frazione decimale è sempre espresso dalla cifra 1 seguita a destra da tanti zeri quante sono le cifre a destra del punto nel numero scritto. Onde se ci verrà dettata una frazione rappresentante, ad esempio, i deci-millesimi, come il denominatore 10000 ha quattro zeri, così a destra del punto nella frazione scritta ci vorranno quattro cifre. L'ultima cifra del numeratore dettato dovrà trovarsi nella quarta sede a destra del punto. Se il numeratore dettato non ha quattro cifre, si

farà precedere da un numero conveniente di zeri affinchè l'ultima cifra sia nella quarta sede. Lo stesso principio vale per la scrittura di qualunque frazione decimale. Sia per esempio da scrivere il numero 8 intieri e 37 deci-millesimi. Si scriverà da prima *l'otto* seguito dal punto, e a destra di questo converrà scrivere il numero 37 con quattro cifre, giacchè il denominatore 10000 ha quattro zeri. Ora il 37 con quattro cifre non può scriversi che così: 0037. Onde il numero proposto si scriverà: 8'0037.

148. Se in una frazione decimale si trasporta il punto di una sede verso destra, il valore della frazione viene moltiplicato per dieci. Sia la frazione 123'4769: si trasporti il punto di una sede a destra e si ottiene 1234'769. Come si vede, con questa trasposizione, ogni cifra del numero proposto acquista un valore decuplo di quello che aveva prima, venendo ciascuna cifra trasportata di una sede verso sinistra per rapporto al punto; quindi tutto il numero sarà moltiplicato per dieci. E infatti la cifra 3, che prima rappresentava le unità, rappresenta, dopo il trasporto del punto le decine; la cifra 2, che rappresentava le decine, ora rappresenta le centinaia; la cifra 1 rappresentava prima le centinaia, ora le migliaia; la cifra 4 prima i decimi, dopo le unità; la cifra 7 prima i centesimi, dopo i decimi, e così dicasi delle altre; cosicchè ciascuna cifra ha acquistato un valore decuplo.

Se si trasporterà una seconda volta il punto d'una sede verso destra, si moltiplicherà una seconda volta il numero per dieci. Quindi trasportando in un numero frazionario decimale il punto verso destra di un certo numero di sedi, il numero proposto viene moltiplicato tante volte per dieci, quante sono le sedi

di cui si trasportò il punto, ossia si moltiplicherà per un numero che consta dalla cifra 1 seguita a destra da tante cifre *zero* quante sono le sedi suddette.

149. L'inverso succede trasportando il punto verso sinistra, cioè si divide il numero tante volte per dieci quante sono le sedi di cui si trasporterà il punto verso sinistra. Infatti portando il punto di una sede verso sinistra, ciascuna cifra del numero proposto viene trasportata d'una sede verso destra per rapporto al punto, ed acquista perciò un valore dieci volte minore di quello che aveva prima. Onde tutto il numero resta diviso per dieci ad ogni trasposizione del punto di una sede verso sinistra.

Quindi se si volesse dividere il numero 471˙35 per 100, ossia due volte di seguito per dieci, basterebbe scrivere 4˙7135; se si volesse dividere per mille, si trasporterebbe il punto a sinistra di tutte le cifre, e si otterrebbe ˙47135. Se l'avessimo diviso per diecimila, avremmo ottenuto ˙047135, e così di seguito.

Lo stesso numero 471˙35 moltiplicato per dieci dà 4713˙5: per cento, dà 47135. In questo ultimo risultato non si scrive più il punto, non vi essendo più cifre decimali da separare.

150. In ogni numero intero il *punto* si sottintende come scritto a destra di tutte le cifre, onde trasportandolo a sinistra o a destra (aggiungendo però *zeri* in quest'ultimo caso), si dividerà o si moltiplicherà il numero intiero proposto per 10, 100, 1000, ecc., il che è d'accordo con quanto si è detto nel numero 13. Così il numero 1859 moltiplicato per mille diventa 1859000. Lo stesso numero diviso per cento diviene 18˙59, ossia 18 intieri e 59 centesimi.

151. Aggiungendo a destra di una frazione decimale un numero qualsivoglia di zeri, il valore della frazione non viene mutato, perchè le cifre del numero proposto, per quest'aggiunta, non mutano di posizione rispetto al punto, e conservano tutte il loro valore primitivo.

Questo principio molto importante nella teoria delle frazioni decimali si può ancora dimostrare come segue. Aggiungendo un numero qualsivoglia di zeri a destra del numeratore di una frazione decimale, gli stessi zeri s'intendono aggiunti alla destra del denominatore sottinteso, il quale è sempre formato dalla cifra 1 seguìta a destra da tanti zeri quante sono nel numeratore le cifre a destra del punto. Così i due termini della frazione sono moltiplicati per un medesimo numero, il che non altera il valore della frazione (104).

152. Dalle cose dette si vede che una frazione decimale differisce da una frazione ordinaria in ciò, che questa può avere per denominatore un numero qualsivoglia, quella non può avere per donominatore se non il 10, il 100, il 1000, e in generale un numero che consti della cifra 1 seguìta da zeri. Inoltre nella scrittura della frazione ordinaria è necessario esprimere i due termini, mentre nella scrittura della frazione decimale si esprime il solo numeratore. Il denominatore sottinteso si riconosce immediatamente, sapendo che esso è sempre un numero che consta della cifra 1 seguìta da tanti zeri, quante sono, nel numeratore espresso, le cifre a destra del punto.

---

§ 2. Addizione.

153. Per sommare i numeri frazionarii decimali si scrivono questi gli uni sotto gli altri in modo, che le unità dello stesso ordine siano tutte in una medesima colonna verticale. Ne avverrà che i punti che separano la parte intera dalla parte frazionaria, saranno essi pure tutti in una medesima colonna. Ciò posto si faccia l'addizione come nei numeri interi, scrivendo nella somma il punto nella colonna de'punti, e l'operazione sarà terminata. I giovani potranno esercitarsi sugli esempi seguenti, e su altri simili.

˙1509	139˙007
21˙701	41˙4152
15˙2905	20˙025
3˙48	13˙70009
40˙6224	214˙14729

§ 3. Sottrazione.

154. Per sottrarre una frazione decimale da un'altra, si scrive la prima sotto la seconda in modo che le unità di uno stesso ordine si corrispondano, e si fa la sottrazione come negli interi, scrivendo nel risultato il punto nella colonna de' punti. In caso che il minuendo avesse un numero minore di cifre a destra del punto di quello che ne ha il sottraendo, si potranno aggiungere zeri a destra del minuendo

tanti che bastino affinchè si siano eguagliate ne' due numeri le cifre a destra del punto. *Esempi:*

3˙045100	5˙000	˙17013
2˙913512	˙735	˙003
˙131588	4˙265	˙16713

Coll'eguagliare i numeri delle cifre a destra del punto in due o più frazioni decimali, si riducono queste allo stesso denominatore. Così le frazioni ˙63 e ˙72341, ridotte allo stesso denominatore, divengono rispettivamente ˙63000, e ˙72341.

Anche alle frazioni decimali si può applicare la sottrazione abbreviata col mezzo de' complementi, come nel n° 49. Così sia da sottrarre ˙17803 da ˙9012; prendo pel sottraendo il complemento ad *uno*, che è ˙82197, e lo sommo con ˙9012, ed ottengo il risultato 1˙72317, dal quale togliendo un'unità, avrò il resto domandato, che è ˙72317. Se la frazione di cui si vuole il complemento fosse 3˙14159, si prenderebbe il complemento a 10, e si troverebbe 6˙85841.

§ 4. Moltiplicazione.

155. Per moltiplicare due numeri frazionari decimali, si sopprimono in amendue i punti, si riguardano come interi, si fa come negli interi la loro moltiplicazione, e a destra del prodotto che si otterrà si separano con un punto tante cifre quante erano a destra del punto in tutti e due i fattori insieme. Dietro questa regola si otterranno i seguenti risultati:

·41	3·2101	5·07
·13	·091	2·5
123	32101	2535
41	288909	1014
·0533	·2921191	12·675

Allorquando nel prodotto non vi saranno tante cifre quante si debbono separare col punto verso destra, si aggiungeranno alla sinistra di esso tanti zeri, quanti bastano, affinchè si abbiano le cifre necessarie da separarsi, come nel primo esempio precedente. Ecco un altro esempio: siano da moltiplicare fra loro i due fattori ·035 e ·0008. Ecco l'operazione:

35
8
·0000280

156. La ragione della regola esposta consiste in ciò che, togliendo il punto dal moltiplicando, questo viene moltiplicato tante volte per dieci quante erano le cifre a destra del punto soppresso; quindi il prodotto che si otterrà sarà esso pure altrettante volte dieci volte maggiore. Lo stesso effetto produce la soppressione del punto nel moltiplicatore; cosicchè per le due soppressioni contemporanee il prodotto che si otterrà sarà tante volte dieci volte maggiore, quante erano in tutti e due insieme i fattori le cifre a destra del punto: onde per ridurlo al vero prodotto cercato, converrà dividerlo altrettante volte per dieci, il che si fa colla separazione delle cifre col punto a destra del prodotto ottenuto.

157. Si arriva alla stessa conclusione riducendo i fattori in frazione ordinaria. Invero prendiamo il

terzo degli esempi che precedono, e sia da moltiplicare 5'07 per 2'5; essendo $5'07=\frac{507}{100}$, e $2'5=\frac{25}{10}$, avremo così da moltiplicare due frazioni ordinarie i cui denominatori sono 100 e 10. Il prodotto cercato varrà il prodotto dei numeratori 507 e 25, ossia de' due numeri dati, toltone il punto, diviso pel prodotto dei denominatori $100\times10=1000$. Ma per dividere per 1000, basta separare con un punto tre cifre verso la destra del numero da dividersi, la qual cosa conduce al risultato sopra trovato.

§ 5. Divisione.

158. In questa operazione distingueremo due casi: 1º quello in cui il divisore è intiero; 2º quello in cui esso è frazionario.

1º *Caso.* Sia da dividere il numero 16'081 per 13. Ciò si riduce a cercare la 13esima parte di 16'081, ossia di 16081 millesimi. Dividendo adunque 16081 per 13 il risultato 1237 esprimerà in millesimi il quoziente cercato, il quale sarà perciò 1'237. Ecco l'operazione:

```
16'081   | 13
13       |------
---       1'237
 30
 26
 ---
  48
  39
  ---
   91
   91
   ---
    0
```

Sia ancora da dividere il numero 28·7531 per 315. Bisognerà trovare la 315^{esima} parte di 28·7531 ossia di 287531 decimillesimi. Il quoziente di questo numero per 315 indicherà in decimillesimi il quoziente cercato, e dividendolo per 10000 si avrà il vero quoziente. Ecco ancora l'operazione:

```
28·7531  | 315
28 35    |·0912
   403
   315
    881
    630
    251
```

Eseguita la divisione come negli intieri, si trova il quoziente intiero 912, col resto 251, cioè si avrà (114) il quoziente completo $912+\frac{251}{315}$, il quale essendo di decimillesimi, scrittogli a sito il punto, ci dà il vero quoziente ·0912, più $\frac{251}{315}$ di decimillesimo. Si vede che il vero quoziente è compreso tra ·0912 e ·0913, cioè esso è l'uno o l'altro di questi valori, coll'esattezza ne' decimillesimi, o nella quarta cifra. Il primo valore pecca per difetto, il secondo per eccesso.

159. *Regola*. Si scorge pertanto che per dividere un numero frazionario decimale per un numero intiero conviene fare astrazione del punto· nel dividendo, trovare il quoziente esatto negli intieri e separare a destra di questo tante cifre decimali, quante sono nel dividendo. Con ciò, se la divisione si è fatta senza resto, si ottiene il quoziente completo; se no, si ottiene un quoziente approssimato, ossia con un errore minore di una unità dell'ordine dell'ultima sua cifra.

160. In quest'ultimo caso, se vogliasi un'approssimazione maggiore, si possono aggiungere, o intendere aggiunti a destra del dividendo degli zeri (151) fino a quell'ordine di unità, al quale si vuole spingere il grado di esattezza.

161. Allorchè il dividendo è minore del divisore, può darsi che, soppresso il punto nel dividendo, questo non contenga ancora il divisore, come avviene nell'esempio 3'15 ÷ 483. Allora si aggiungono zeri al dividendo affinchè la divisione sia possibile. Se però il grado di esattezza richiesto nel quoziente non va al di là dell' ultima cifra del dividendo, o non raggiunge la prima cifra significativa che si otterrebbe al quoziente dopo aggiunti gli zeri, si conchiuderà che il quoziente entro i limiti di quel grado di esattezza è *zero*.

162. Nella pratica, come scorgesi dagli esempi del num. 158, non si cancella il punto nel dividendo, e si scrive subito a posto il punto nel quoziente prima che la divisione sia finita. Dopo di aver diviso la parte intiera del dividendo pel divisore, e prima di abbassare a destra del resto la cifra dei decimi, si scrive il punto al quoziente, e se la parte intiera è minore del divisore, come nel secondo degli esempi citati, allora si scrive subito il punto al quoziente, e dietro al punto si scrivono tanti zeri, quante sono le cifre che si aggiungono alla parte intiera del dividendo per formare il primo dividendo parziale, meno una.

163. 2° *Caso. Divisione di un numero intiero o frazionario per un divisore frazionario.* Sia da dividere il numero 48'5917 per 5'32; essendo 5'32 $= \frac{532}{100}$, basterà (135 e 140) moltiplicare il dividendo 48'5917 per 100 e dividere il prodotto per 532, ossia

dividere 4859'17 per 532, cosicchè questo 2° caso di divisione resta in tale maniera ridotto al caso precedente in cui il divisore è intiero.

Ben si scorge da questo ragionamento, che per dividere un numero qualunque, intiero o frazionario, per un numero frazionario decimale, basta moltiplicare, o col trasporto del punto, o coll'aggiunta di zeri, il dividendo tante volte per 10 quante cifre decimali ha il divisore, sopprimere in questo il punto, ed eseguire la divisione come nel primo caso.

164. Suolsi anche dare la seguente regola generale per la divisione delle frazioni decimali. Si riducano, coll'aggiunta di zeri, il dividendo ed il divisore ad avere lo stesso numero di cifre decimali, se già non l'hanno, si sopprima in essi il punto, e si faccia la divisione come negli intieri; il risultato che si troverà sarà il quoziente cercato, poichè colla soppressione de' punti si sono moltiplicati i termini della divisione per un medesimo numero (46 e 148).

165. In generale la divisione de' numeri frazionari decimali si può ancora eseguire trascurando i punti e riguardando i termini della divisione come intieri, con patto che si scriva poscia nel quoziente il punto in sito conveniente. Invero supponiamo che il dividendo abbia m cifre dopo del punto, ed il divisore ne abbia n. Tolti i punti, il dividendo verrà così moltiplicato m volte di seguito per 10, o meglio per 10^m, ed il divisore per 10^n, le quali due operazioni equivalgono a moltiplicare il quoziente primitivo dei numeri dati per 10^m e a dividerlo in seguito per 10^n. Onde per ridurre il quoziente che si troverà al vero quoziente cercato, bisognerà moltiplicarlo per 10^n, e dividerlo in seguito per 10^m, il che si ottiene trasportando in esso il punto (espresso o sottinteso),

prima di n sedi verso la destra e poi, da quest'ultima posizione, di m sedi verso la sinistra, ossia trasportando nel quoziente il punto di $n-m$ sedi verso destra, o di $m-n$ sedi verso sinistra, secondo che si ha $n>m$, o $m>n$.

§ 6. Riduzione delle frazioni ordinarie in decimali e viceversa.

166. *Riduzione di una frazione ordinaria in una decimale equivalente.* Una frazione ordinaria non è altro che una divisione indicata (112). È sempre il numeratore che devesi dividere pel denominatore; siccome però in generale questa divisione non può effettuarsi, così si ricorre al seguente mezzo per cui la frazione viene ridotta in decimale equivalente. Si moltiplica il numeratore per 10, 100, 1000, ecc., aggiungendo zeri a destra di esso, quindi si divide il risultato ottenuto pel denominatore; il quoziente che si otterrà sarà tante volte dieci volte maggiore del vero quoziente cercato, quanti sono gli zeri aggiunti a destra del numeratore: onde converrà dividerlo altrettante volte per 10; il che si fa scrivendo un punto che separi alla sua destra tante cifre, quanti zeri sono stati aggiunti al numeratore.

Esempi: Sia da ridurre in decimali la frazione $\frac{5}{8}$, si farà la seguente operazione:

```
5000  | 8
48    |----
---   | 625
 20
 16
---
  40
  40
 ---
   0
```

Dividendo per 1000 il quoziente 625, si avrà '625 equivalente a $\frac{5}{8}$. Allo stesso modo si troverebbe che la frazione $\frac{3}{4}$ vale '75; la frazione $\frac{7}{16}$ vale '4375; la quantità frazionaria $\frac{27}{20}$ vale 1'35.

Questa operazione appunto conviene fare quando la divisione negli interi non potendosi eseguire, si arriva ad un resto che dovrebbesi ancora dividere pel divisore (38 e 114). Ottenuto il resto, si scrive a destra del quoziente intero trovato un punto, si moltiplica il resto per 10 con aggiungergli uno zero a destra, e si divide pel divisore, scrivendo nella colonna dei decimi la cifra che si otterrà al quoziente. Dopo si continua la divisione, come negl'intieri, scrivendo sempre a destra de' resti successivi uno zero, finchè si arrivi ad un resto nullo. Le cifre che si ottengono al quoziente si scrivono le une dietro le altre dopo il punto già scritto.

167. Quest'operazione torna allo stesso che aggiungere al dividendo uno o più zeri i quali si abbassano successivamente a destra de' resti che si ottengono. Resta così il dividendo moltiplicato una o più volte per 10; ma scrivendo il punto al quoziente nel sito indicato, si divide questo altrettante volte per 10, il che lo riduce al suo vero valore.

Esempio:

```
1278        | 25
125         |------
----        | 51'12
 28
 25
 ---
  30
  25
  ---
   50
   50
   ---
    0
```

168. Nel ridurre in decimale una frazione, il cui denominatore sia di una sola cifra, non è necessario di disporre l'operazione come nel n° 166, potendosi fare l'operazione a mente come segue: $\frac{5}{8}$='625.

Si dice: l'8 nel 5 sta zero volte (si scrive il punto al quoziente) coll'avanzo di 5, che con uno zero a destra fa 50, l'8 nel 50 sta 6 volte (si scrive 6 al quoziente) coll'avanzo di 2, che fa 20, l'8 in 20 sta 2 volte (si scrive 2 al quoziente) coll'avanzo di 4, che fa 40, l'8 in 40 sta 5 volte coll'avanzo di zero. Si scrive il 5 al quoziente, e la riduzione è finita.

169. Accade sovente che, per quanti zeri si aggiungano al numeratore, la divisione non termina mai; ciò avviene, ad esempio, nella frazione $\frac{2}{3}$, la quale ridotta in decimali dà '66666 . . . all'infinito. Così la frazione $\frac{5}{6}$ dà '833333 . . . all'infinito; la frazione $\frac{7}{9}$ dà '7777 . . . all'infinito; la frazione $\frac{3}{7}$ dà '428571 428571 428571 . . . all'infinito; la frazione $\frac{3}{11}$ dà '27 27 27 . . . all'infinito. Si osserverà di leggieri che, in tutte queste frazioni decimali ottenute, un gruppo di una, due o più cifre si ripete periodicamente all'infinito. Per questo motivo tali frazioni diconsi decimali *periodiche*. Esse sono *periodiche semplici*, se il periodo comincia subito dopo il punto, come nella frazione '375 375 375 . . . ; e *periodiche miste*, se il periodo non comincia subito dopo il punto, come nella frazione '78 21 21 21 21 . . . Dicesi *periodo* l'insieme delle cifre che si ripetono perpetuamente. Così nell'ultima frazione il periodo è 21; nella precedente è 375.

Una frazione periodica semplice o mista si rappresenta scrivendo una sola volta il periodo con un punto sulla prima e sull'ultima cifra di esso, cosicchè invece di '84 84 84... scriveremo '$\dot{8}\dot{4}$, invece di '7777...

scriveremo $'\dot{7}$, invece di 73'158888... scriveremo $73'15\dot{8}$, invece di '078 4117 4117 4117... scriveremo $'078\dot{4}11\dot{7}$.

170. Per riconoscere *a priori* quando una frazione ordinaria, ridotta in decimale equivalente, dia una frazione finita, e quando no, basta fare le seguenti osservazioni. Ricordiamo il principio del nº 78, il quale dice, che, affinchè una divisione riesca esatta, fa d'uopo che il dividendo contenga tutti i fattori primi del divisore ripetuti almeno tante volte quante lo sono in questo. Ora per ridurre una frazione ordinaria in decimale si divide pel denominatore il numeratore moltiplicato una o più volte per 10. Supponendo la frazione data già ridotta ai minimi termini, il che nulla toglie alla generalità del ragionamento, il numeratore non conterrà nessuno dei fattori primi del denominatore; e moltiplicandolo successivamente per 10, non s'introduce in esso altro fattore primo, fuori che quelli del 10, che sono il 2 ed il 5. Dunque se il denominatore della frazione data, supposta ridotta ai minimi termini, ha fattori primi diversi dal 2 e dal 5, per quante volte si moltiplichi per 10 il numeratore, non avverrà mai che possa questo dividersi esattamente pel denominatore: onde la frazione decimale che si otterrà non sarà finita.

Al contrario, non contenendo il denominatore altri fattori primi, fuorchè il 2 ed il 5, moltiplicando un numero conveniente di volte per 10 il numeratore, si renderà sempre questo divisibile pel denominatore, e perciò la frazione decimale, che si otterrà, sarà finita.

Il numero delle volte, che converrà moltiplicare per 10 il numeratore, affinchè ciò avvenga, è deter-

minato dal numero delle volte che entrano i fattori 2 e 5 nel denominatore dato, ed è precisamente eguale al numero delle volte che entra nel denominatore quello di questi due fattori 2 e 5, il quale è più volte ripetuto.

171. Si può inoltre dimostrare che, se la frazione decimale risultante da una frazione ordinaria non è finita, essa è necessariamente periodica. Infatti i resti successivi che si ottengono facendo la divisione voluta per la riduzione di che parliamo, essendo tutti minori del divisore, non si possono ottenere in nessun caso più resti successivi differenti gli uni dagli altri di quello che abbia unità il divisore, meno una. Così il divisore essendo, ad esempio, 6, i resti saranno tutti minori di questo numero, e sarà impossibile trovare più di cinque resti successivi differenti. Adunque dopo di aver trovato tutto al più tanti resti differenti, quante sono le unità nel divisore, meno una, necessariamente si cadrà sopra un resto già ottenuto prima. Aggiungendo un zero a questo resto, si ottiene un dividendo parziale già avuto altra volta nella serie de' dividendi parziali che precedono, si otterrà al quoziente la medesima cifra che allora si ottenne, ed un nuovo resto pure eguale al resto allora ottenuto. Quindi necessariamente i resti e le cifre del quoziente si ripetono periodicamente, ed il periodo non potrà in nessun caso avere più cifre di quello che contenga unità il divisore, meno una.

Pertanto possiamo conchiudere che una frazione ordinaria, ridotta ai minimi termini, convertita in decimale equivalente, dà luogo ad una frazione decimale finita ogni volta che il suo denominatore non contiene fattori primi diversi dal 2 e dal 5; dà poi luogo ad una frazione decimale periodica ogni volta

che il suo denominatore contiene fattori primi diversi dal 2 e dal 5.

172. *Riduzione di una frazione decimale finita in frazione ordinaria equivalente.* Si fa questa riduzione scrivendo sotto al numeratore espresso della frazione decimale il suo denominatore, che è sottinteso, e riducendo poscia la frazione ottenuta ai minimi termini. Così si avrà .

$$\cdot 5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}; \quad \cdot 25 = \frac{25}{100} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4};$$

$$\cdot 28 = \frac{28}{100} = \frac{7}{25}; \quad 1\cdot 35 = 1 + \frac{35}{100} = 1 + \frac{7}{20}.$$

In quest'ultimo esempio si poteva anche fare:

$$1\cdot 35 = \frac{135}{100} = \frac{27}{20}.$$

173. *Riduzione di una frazione decimale periodica semplice in frazione ordinaria equivalente.* Una frazione decimale periodica semplice vale una frazione ordinaria che abbia per numeratore il periodo della frazione e per denominatore un numero che consti di tante cifre 9 quante sono le cifre del periodo

Così si avrà $\cdot\dot{2}5\dot{5} = \frac{255}{999} = \frac{85}{333};$

$$\cdot\dot{3}\dot{7} = \frac{37}{99}; \quad \cdot\dot{3}4\dot{2} = \frac{342}{999} = \frac{114}{333} = \frac{38}{111}.$$

Infatti sia da ridurre in frazione ordinaria la seguente $\cdot\dot{2}\dot{7}$. Se trasportiamo il punto a destra del primo periodo otteniamo $27\cdot\dot{2}\dot{7}$, il qual numero vale 100 volte la frazione proposta, poichè si è trasportato il punto di due sedi verso destra. Se da questo numero sottrarremo una volta la frazione proposta a questo modo,

$$\begin{array}{r} 27\cdot\dot{2}\dot{7} \\ \cdot\dot{2}\dot{7} \\ \hline 27 \end{array}$$

il resto 27 varrà 99 volte la frazione proposta, e pren-

dendo la 99ma parte di 27 che fa $\frac{27}{99}$ avremo il valore della frazione data, il che era da dimostrare.

174. *Riduzione di una frazione decimale periodica mista in frazione ordinaria equivalente.* Una frazione decimale periodica mista è equivalente ad una frazione ordinaria che abbia per numeratore il numero che è formato dalle cifre non periodiche seguite a destra dalle cifre del periodo, meno il numero formato dalle cifre stesse non periodiche, e che abbia per denominatore un numero che consti di tante cifre 9, quante sono le cifre del periodo, seguite a destra da tante cifre zero, quante sono le cifre non periodiche.

Così sarà $\cdot 25\dot{7}1\dot{2} = \frac{25712-25}{99900} = \frac{25687}{99900}$;

egualmente sarà $\cdot 7\dot{4}2\dot{1} = \frac{7421-7}{9990} = \frac{7414}{9990}$.

Infatti sia da ridurre la seguente frazione $\cdot 42\dot{9}1\dot{3}$ in ordinaria equivalente. Trasportando il punto prima a destra della parte non periodica e poi a destra del primo periodo, e sottraendo il primo risultato dal secondo

$$\begin{array}{r} 42913\cdot\dot{9}1\dot{3} \\ -42\cdot\dot{9}1\dot{3} \\ \hline =42913-42, \end{array}$$

il resto 42913—42 vale 100000—100 volte la frazione data, poichè col trasporto del punto abbiamo moltiplicato la frazione per questi numeri. Ma 100000 —100=99900; dunque la frazione data vale la 99900^{esima} parte di 42913—42, ossia vale

$$\frac{42913-42}{99900},$$

che è ciò che era da dimostrare.

Convenzionalmente possiamo enunciare con più concisione la stessa regola così (abbracciando anche il caso delle frazioni periodiche semplici); una frazione periodica vale una frazione ordinaria che abbia per numeratore il numero formato dalle cifre della frazione data, meno il numero formato dalle cifre non periodiche, se ve ne ha, e per denominatore il numero formato da tante cifre 9 quante sono le cifre del periodo, seguite a destra da tanti zeri quante sono le cifre non periodiche dopo il punto del numero dato. Così si troverà

$$4{\cdot}1\dot{7}=\frac{417-41}{90};\ 13{\cdot}\dot{5}1\dot{9}=\frac{13519-13}{999};$$

$$\cdot 43\dot{7}1\dot{8}=\frac{43718-43}{99900};\ \cdot\dot{8}32\dot{9}=\frac{8329}{9999}.$$

Per tutti i casi la dimostrazione è sempre la stessa.

175. L'ultima cifra del periodo di una frazione decimale periodica mista non è mai eguale all'ultima cifra della parte non periodica, poichè se tali cifre fossero uguali, si farebbe cominciare il periodo da una cifra più a sinistra. Così nella frazione $\cdot 42\dot{9}1\dot{3}$ l'ultima cifra del periodo è 3, l'ultima della parte non periodica è 2. Se al posto di questo 2 si scrivesse un 3, la frazione che era $\cdot 42\dot{9}1\dot{3}$ diverrebbe $\cdot 4\dot{3}9\dot{1}$, ed allora la parte non periodica sarebbe 4, ed il periodo 391. Ciò premesso, il numeratore della frazione ordinaria equivalente alla frazione periodica mista è la differenza di due numeri le cui ultime cifre non sono mai eguali. Dunque tale numeratore non terminerà mai con cifra zero, e perciò esso non conterrà mai insieme i due fattori 2 e 5. Il denominatore al contrario termina sempre con cifra zero, e contiene sempre ambidue i

fattori 2 e 5: per conseguenza anche dopo di avere ridotto ai minimi termini la frazione ordinaria trovata, il suo denominatore conterrà sempre uno almeno dei fattori 2 e 5.

Di qui si deduce che, se una frazione ordinaria ridotta ai minimi termini non contiene nel suo denominatore nè il fattore 2, nè il fattore 5, essa, ridotta in decimale equivalente, non potrà dar luogo ad una frazione periodica mista, ma genera una frazione periodica semplice.

Al contrario, se la frazione ordinaria ridotta ai minimi termini contiene nel suo denominatore uno dei fattori 2 e 5, od ambidue, insieme con fattori differenti da questi, allora essa genera necessariamente una frazione decimale periodica mista. Invero il denominatore della frazione ordinaria equivalente alla frazione periodica semplice (173) termina sempre con cifra 9: dunque esso non contiene mai, neanche dopo la riduzione della frazione ai minimi termini, alcuno dei fattori 2 e 5.

176. Terminerò questo § avvertendo che nei casi pratici, avendo una frazione decimale moltissime cifre frazionarie, non è sempre necessario di tenere stretto conto di tutte. Così se l'oggetto rappresentato dalla frazione avesse tale entità, che poco importasse la differenza di un centesimo in più o in meno, si potrebbero trascurare tutte le cifre che succedono alla seconda dopo il punto, le quali, per la natura della numerazione scritta, tutte insieme rappresentano un valore sempre minore di un centesimo.

Se si volesse che l'errore commesso fosse minore di un millesimo, bisognerebbe tener conto delle tre prime cifre a destra del punto, e così di seguito.

Così sia la frazione ·57138 avente cinque cifre

dopo il punto; essa rappresenta cinquantasette mila cento e trentotto centomillesimi; ma se l'oggetto, di cui essa rappresenta una parte, fosse di tale natura, che il tener conto delle quantità minori di un decimo riuscisse cosa di nessuna entità, potremmo sostituire alla frazione data la frazione ˙5, poichè la parte trascurata, che è ˙07138, vale meno di un decimo. Notando però che cinque centesimi fanno un mezzo decimo, e che nella parte trascurata abbiamo 7 centesimi, si conosce facilmente che la frazione data vale più di cinque decimi e mezzo, ossia è più prossima a 6 decimi che a 5, motivo per cui sarà meglio prendere ˙6 che ˙5, per rappresentare con approssimazione la frazione data.

Dietro il ragionamento precedente si fonda la seguente regola: volendo in una frazione decimale di molte cifre ottenere un'approssimazione fino ad una unità di un determinato ordine dopo il punto, si trascureranno tutte le cifre degli ordini seguenti; e volendo, senza prendere più cifre, ottenere un'approssimazione fino ad una mezza unità di un ordine determinato, se la cifra del primo ordine trascurato vale meno di 5, si seguirà la regola ora data; ma se essa vale più di 5, ovvero se, valendo 5, è seguita da cifre significative, si correggerà l'ultima cifra di cui si tiene conto, accrescendola di una unità. Ove la prima cifra trascurata fosse 5 e non venissero dietro ad essa altre cifre significative, sarebbe indifferente correggere, o lasciare com'è, l'ultima cifra presa, poichè nell'uno e nell'altro caso si commette un errore eguale ad una mezza unità dell'ordine di questa cifra, colla differenza che, se si fa la correzione, l'errore commesso è in più; se non si fa, è in meno.

§ 7. Esercizi sulle frazioni ordinarie e decimali

177. 1⁰ Calcolare il valore dell'espressione

$$\frac{a+b-2c}{a+b+2c},$$

prima nell'ipotesi di $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{4}{5}$, $c=\frac{8}{15}$, poi nell'ipotesi di $a=\cdot48$, $b=3\cdot175$, $c=\cdot72903$.

Ridurre in decimali il risultato trovato nella prima ipotesi, ed in frazione ordinaria quello della seconda.

Trovare in frazione ordinaria ed in frazione decimale la differenza de' due risultati.

2⁰ Calcolare in frazione ordinaria il valore dell'espressione: $\left(a+b-\frac{a}{4b^2}\right)\div\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-2b}{2a+b}\right)$, prima nell'ipotesi di $a=\frac{4}{5}$, $b=\frac{7}{20}$, poi nell'ipotesi di $a=\cdot4\dot{8}$, $b=\cdot0\dot{3}$, e poi ancora nell'ipotesi di $a=\frac{2}{5}$, $b=\cdot02$.

3⁰ Trovare il prodotto di $\cdot1\dot{2}0\dot{5}$ per $\cdot41$ esatto nei decimillesimi. Si farà per ciò il prodotto in frazione ordinaria, la quale si ridurrà in decimale equivalente, rigettando le cifre decimali oltre la quarta.

Trovare lo stesso risultato con errore minore di mezza unità del sesto ordine dopo il punto.

4⁰ Dimostrare che il prodotto di due frazioni periodiche semplici è uguale ad una frazione periodica semplice:

5⁰ Dimostrare le seguenti uguaglianze:

$\cdot\dot{9}=1$; $\cdot0\dot{9}=\cdot1$; $\cdot00\dot{9}=\cdot01$; $\cdot000\dot{9}=\cdot001$; ecc.

e queste altre:

$3=2\cdot\dot{9}$; $\cdot83=\cdot82\dot{9}$; $1\cdot2=1\cdot1\dot{9}$; $\cdot7=\cdot6\dot{9}$. ecc.

6° Sapendo che

$\frac{1}{9}=\cdot\dot{1}$; $\frac{1}{99}=\cdot0\dot{1}$; $\frac{1}{999}=\cdot00\dot{1}$; $\frac{1}{9999}=\cdot000\dot{1}$; ec.

dedurne la dimostrazione della regola del n° 173.

7° Dimostrare che ogni numero intiero è un sottomoltiplo di un numero scritto colla cifra 1 seguita da zeri, o di un numero scritto con cifre 9, o di un numero scritto con cifre 9 seguite da zeri, il che è una conseguenza de' principii stabiliti ne' numeri 117 e 174.

8° Cercare per qual numero convenga moltiplicare un numero dato, perchè il prodotto sia scritto colle cifre indicate nell'esempio precedente.

CAPO VI.

PESI E MISURE

§ 1. Sistema metrico decimale.

178. *Origine di esso.* Nocevolissima alle transazioni commerciali ed a tutte le sociali relazioni è la diversità delle lingue, delle monete e de' sistemi di pesi e misure usati ne' diversi paesi. La riduzione di tutte queste cose all'uniformità in tutti i paesi della terra sarebbe una vera conquista per l'umanità. I filosofi francesi, in sullo scorcio del secolo passato, collo scopo di ridurre all'uniformità tutti i differenti sistemi di pesi e misure, hanno ideato il nuovo sistema metrico decimale, il quale riduce alla massima semplicità tutte le operazioni aritmetiche relative ai pesi ed alle misure. Le divisioni e suddivisioni delle unità principali in questo sistema

sono fatte tutte sulla medesima base, ed i loro nomi portano con sè l'idea della cosa rappresentata ; sarebbe a desiderarsi che un tal sistema venisse universalmente adottato.

179. *Unità fondamentale.* L'unità fondamentale di questo sistema è il *metro*, che è l'unità di lunghezza, e vale la 40 milionesima parte della circonferenza del meridiano terrestre.

Suoi multipli e suddivisioni. Dieci metri formano un *decàmetro*, cento un *ettòmetro*, mille un *chilòmetro*, dieci mila un *miriàmetro*. Il metro si suddivide in dieci parti eguali dette *decìmetri*, il decimetro in dieci *centimetri*, il centimetro in dieci *millimetri*.

Il chilometro ed il miriametro sono unità di lunghezza itineraria.

180. *Misure di superficie.* Le superficie non troppo estese si misurano a metri quadrati. Il metro quadrato è una superficie quadra, lunga e larga un metro. Il metro quadrato si suddivide in decimi, centesimi, millesimi, ecc., di metro quadrato.

NB. Si guardino bene i principianti dal confondere i decimi, centesimi, millesimi, ecc., di metro quadrato coi decimetri quadrati, centimetri quadrati, millimetri quadrati, ecc. La differenza è enorme. Per farci un' idea del decimo di metro quadrato, per esempio, immaginiamo un quadrato che abbia per lato un metro, tiriamo in esso nove rette parallele ad un suo lato e tali che dividano la superficie di tutto il quadrato in dieci parti eguali. Ciascuna parte sarà larga un decimetro e lunga un metro, e varrà un decimo di metro quadrato, della qual cosa ciascuno può convincersi facendo la figura. Dividendo ora una di queste parti con linee

trasversali in dieci parti eguali, si riconoscerà tosto che ognuna di queste ultime è un quadrato che ha per lato un decimetro, ossia è un decimetro quadrato. Ci vogliono dunque dieci decimetri quadrati per fare un decimo di metro quadrato, e quindi 100 decimetri quadrati per fare un metro quadrato: cosicchè il decimetro quadrato vale appena un centesimo di metro quadrato. Con analoga figura i principianti si convinceranno che ci vogliono 100×100 ossia 10000 centimetri quadrati per fare un metro quadrato, e 1000×1000, ossia un milione di millimetri quadrati per fare un metro quadrato, e così di seguito.

Per la stessa ragione il decametro quadrato non vale dieci metri quadrati, ma 10×10, ossia 100 metri quadrati; l'ettometro quadrato vale 100×100 ossia 10000 metri quadrati, e così di seguito.

Per le superficie agrarie l'unità di misura è il decametro quadrato che prende il nome di *aro*. È l'aro una superficie quadra, lunga e larga un decametro; esso vale cento metri quadrati. Cento ari fanno un *èttaro*. L'aro si suddivide in 10 parti eguali dette *deciàri*, il deciaro in dieci *centiàri*.

Le superficie territoriali, provinciali, ecc., si misurano a chilometri quadrati, oppure a miriametri quadrati.

181. *Unità di volume*. Il metro cubo è l'unità di volume. Si suddivide in decimi, centesimi, millesimi, ecc., del metro cubo. Esso prende talvolta il nome di *stero*, specialmente se si riferisce alla misura del volume delle materie secche, come paglia, fieno, sabbia, ecc.

NB. Anche qui non bisogna confondere i decimi, centesimi, ecc., di metro cubo coi decimetri cubi,

centimetri cubi, ecc., nè il decametro cubo, l'ettometro cubo, ecc., con dieci, cento, ecc., metri cubi. È facile convincersi con apposita figura che il decimo di metro cubo contiene 100 decimetri cubi, e che il metro cubo vale $10 \times 10 \times 10 = 1000$ decimetri cubi, oppure $100 \times 100 \times 100 = 1000000$ di centimetri cubi, ecc. Egualmente il decametro cubo contiene $10 \times 10 \times 10 = 1000$ metri cubi; l'ettometro cubo contiene $100 \times 100 \times 100 = 1000000$ di metri cubi, ecc.

Per i liquidi e le granaglie l'unità di misura è il *litro*, che equivale ad un *decimetro cubo*. Mille litri fanno un metro cubo. Dieci litri fanno un *decàlitro*, cento un *ettòlitro*. Il litro si suddivide in dieci *decìlitri*, il decilitro in 10 *centìlitri*.

182. *Unità di peso*. L'unità di peso è il *grammo*. È il grammo il peso di un centimetro cubo d'acqua distillata alla temperatura della sua massima densità, ossia a quattro gradi centesimali.

Dieci grammi fanno un *decagrammo*, cento un *ettogrammo*, mille un *chilogrammo*, diecimila un *miriagrammo;* cento chilogrammi, ossia dieci miriagrammi fanno un *quintale*, e dieci quintali una *tonnellata*. Il grammo si suddivide in dieci *decigrammi*, il decigrammo in dieci *centigrammi*, il centigrammo in dieci *milligrammi*.

183. *Unità di moneta*. L' unità di moneta è il *franco*. Esso è il valore di cinque grammi d'argento al titolo di ˙9, ossia contenente nove decimi d'argento puro e un decimo di rame. Il franco si suddivide in *decimi* e *centesimi*.

184. È facile di riconoscere dalle cose precedenti, che i moltipli delle misure metriche decimali sono espressi dalle parole di etimologia greca *deca, ecto*

o *etto*, *chilo*, *miria*, che significano rispettivamente *dieci*, *cento*, *mille*, *diecimila*, le quali si fanno precedere al nome dell'unità principale di misura; e che i sottomoltipli si esprimono colle parole di etimologia latina *deci*, *centi*, *milli*, alle quali si attribuisce il senso di decima, centesima, millesima parte dell'unità che si pronuncia o si scrive dopo le parole stesse.

185. Alcuni sogliono indicare in iscrittura le varie unità di misura colle lettere iniziali de' loro nomi semplici o composti, scritte a destra del numero quasi come esponente, adoperando la prima lettera maiuscola quando trattasi di moltipli dell' unità principale, minuscola nel caso dei sottomoltipli. Essendo questo metodo logico, chiaro e semplice, l'adoprerò io pure. Ecco pertanto il quadro delle designazioni abbreviate.

Misure lineari. *m*=metro; D*m*= decametro; E*m*= ettometro; C*m*=chilometro; M*m*=miriametro; *dm*= decimetro; *cm*=centimetro; *mm*=millimetro.

Misure di superficie. Le indicazioni precedenti delle unità lineari seguite dalla lettera *q* indicano unità di superficie espresse in unità lineari quadrate. Così *mq* = metro quadrato; D*mq* = decametro quadrato; *dmq*=decimetro quadrato, ecc. Egualmente *a* significherà *aro;* E*a*=ettaro; *da*=deciaro; *cà*=centiaro.

Misure di volume. I volumi s'indicano colle lettere iniziali dell'unità lineare seguite dalla lettera *c*. Così *mc*=metro cubo; *dmc*=decimetro cubo; D*mc*=decametro cubo, ecc.

Misure di peso. *g*=grammo; D*g* = decagrammo; E*g*=ettogrammo; C*g*=chilogrammo; M*g*=miriagrammo; *q*=quintale; *t*=tonnellata; *dg*=decigrammo; *cg*=centigrammo; *mg*=milligrammo.

186. *Misure effettive.* Si chiamano misure effettive quelle che sono realmente costrutte dai fabbricanti di pesi e misure, e vengono messe in commercio per gli usi comuni. La legge prescrive e permette per ogni specie di unità un numero limitato di misure effettive, ed il governo fa visitare e verificare annualmente da suoi agenti in ogni comune le misure adoperate dai commercianti. I regolamenti prescrivono anche la materia di che debbono constare le misure effettive.

Le misure effettive di lunghezza sono: il decimetro, il doppio decimetro, il mezzo metro, il metro, il doppio metro, il trimetro o triplo metro degli agrimensori, il mezzo decametro, il decametro, il doppio decametro.

Le misure effettive di volume sono: il centilitro, il doppio centilitro, il mezzo decilitro, il decilitro, il doppio decilitro, il mezzo litro, il litro, il doppio litro, il mezzo decalitro, il decalitro, il doppio decalitro, il mezzo ettolitro (la brenta di 50 litri dei Torinesi), l'ettolitro, il doppio ettolitro.

Le misure effettive di peso sono: il milligrammo, il centigrammo, il decigrammo, il grammo, il decagrammo, l'ettogrammo, il chilogrammo, il miriagrammo, il doppio e la metà di ciascuno dei precedenti pesi (tolto però il mezzo milligrammo), ed inoltre il mezzo quintale.

Le monete effettive decimali del Regno d'Italia sono: la pezza d'oro da 100 franchi o lire italiane del peso di 32g'258; id. da 50 lire; id. da 20; id. da 10; lo scudo o la pezza d'argento da 5 lire del peso di 25 grammi; la pezza d'argento da 2 lire; id. da 1 lira; id. da 50 centesimi o 10 soldi; id. da 20 centesimi o 4 soldi; la pezza di rame (nuova)

di 5 centesimi od un soldo, del peso di cinque grammi; id. di due centesimi; id. di un centesimo.

NB. I sistemi metrici diversi dal decimale variano, per così dire, all'infinito. Essendo i medesimi pur troppo ancora in uso nella massima parte de' paesi, ed importando, vuoi per l'uso del commercio, vuoi per l'intelligenza di molti dati storici, d'avere spesso sotto gli occhi il rapporto delle misure de' varii sistemi, ho creduto utile di aggiungere, come appendice al presente volume, un'estesa Tavola di ragguaglio delle principali misure antiche e moderne colle misure decimali, ricavandone i numeri dalle migliori sorgenti, e da tavole ufficiali ogni volta che ciò mi fu possibile.

§ 2. Esercizi di calcolo relativi ai varii sistemi di misure.

187. Si domanda quanti metri valgano 800 trabucchi torinesi. Trovo nella Tavola dell'Appendice alla fine del volume, che un trabucco vale metri 3'086420; dunque 800 trabucchi varranno 800 volte questo numero di metri; ossia valgono metri 2469'1360. Questo è il valore del miglio torinese in metri.

188. Si domanda quanti chilogrammi valgano 38155 grammi. Mille grammi fanno un chilogrammo: dunque i grammi dati fanno tanti chilogrammi, quante volte il numero dato contiene il mille, ossia fanno chilogrammi 38'155.

189. Si domanda quanti ari facciano 37 giornate e 11 tavole torinesi. La tavola è la centesima parte della giornata; dunque la quantità data equivale a giornate 37'11. Moltiplicando questo numero per

Digitized by Google

38'103948, che è il valore della giornata in ari, si trova per prodotto ari 1414'03751028, che è quanto si domanda. Trascurando i millesimi (176), e notando che 100 ari fanno un ettaro, conchiuderemo ancora che 37 giornate e 11 tavole equivalgono a 14 ettari, 14 ari e 4 centiari.

190. Si domanda quanti metri facciano 23 rasi torinesi e mezzo di una stoffa. Un raso vale metri '600137. Moltiplicando adunque questo numero per 23 e mezzo, ossia per 23'5, si troverà che 23 rasi e mezzo valgono metri 14'1032195, ossia 14 metri e 10 centimetri, trascurando i millimetri.

191. Si domanda a quanti trabucchi, piedi ed once torinesi corrispondano 100 metri. La Tavola dice che un metro vale piedi 1'944: dunque cento metri valgono piedi 194'4, ossia 32 trabucchi, 2 piedi e 4 decimi di piede. Per ridurre i quattro decimi di piede in once, li moltiplico per 12, ed avrò 48 decimi di oncia, ossia once 4'8. Dunque 100 metri fanno 32 trabucchi, 2 piedi, 4 once ed 8 decimi di oncia.

192. Si domanda quanti franchi facciano 1000 ducati di Napoli. Trovo nella Tavola delle monete che il ducato di Napoli vale franchi 4'25. Moltiplicando per mille, si troverà che mille ducati fanno 4250 franchi.

193. Si domanda quanti scudi romani facciano 500 franchi. Uno scudo romano vale fr. 5'37: dunque un franco vale la frazione $\frac{1}{5 \cdot 37}$ di scudo romano, e 500 fr. varranno scudi romani $\frac{500}{5 \cdot 37} = \frac{50000}{537} = 93'11$, esatto nei centesimi.

194. Si domanda a quante tavole torinesi equival-

gano 50 pertiche di Milano. La Tavola delle misure di superficie dà per la pertica milanese ari 6'545179; dunque le 50 pertiche di Milano fanno ari 327'25895, che converrà ridurre in tavole torinesi. Ora un aro vale tavole 2'6244: dunque le 50 pertiche di Milano valgono tavole 2'6244×327'25895=858'85838838 =giornate 8, tavole 58, più '85838838 di tavola.

195. Si domanda quanto valga un raso torinese di una stoffa il cui prezzo è di tre franchi al metro. Un raso vale metri '6, trascurando i decimi di millimetro. Dunque la questione è ridotta a quest'altra: Se un metro vale 3 franchi, metri '6 quanto varranno? La risposta è facile: varranno tante volte 3 franchi quanti sono i metri, ossia franchi 3×'6=1'8=1'80. Dunque quella stoffa vale un franco e 80 centesimi il raso.

196. Una stoffa vale 3 franchi ciascun raso. Quanto vale un metro della medesima? Un raso vale metri '6: dunque un metro vale la frazione $\frac{1}{\cdot 6}$ di raso, e perciò ciascun metro di stoffa varrà questo numero di rasi moltiplicato per 3 franchi, valore del raso, ossia varrà $\frac{3}{\cdot 6}=\frac{30}{6}=5$ franchi.

197. Si domanda quanti centimetri quadrati facciano metri quadrati 3'5. Un metro quadrato è un quadrato che ha per lato un metro, ossia 100 centimetri lineari. Dunque ogni metro quadrato contiene 100×100=10000 centimetri quadrati. Moltiplicando per questo numero i metri quadrati 3'5, si avrà, per risposta al quesito 35000 centimetri quadrati.

198. Quanti metri cubi fanno 35458 decimetri cubi? Un metro cubo è un dado che ha per lato un metro, ossia dieci decimetri lineari: dunque ogni metro cubo

contiene decimetri cubi $10\times10\times10=1000$. Pertanto il decimetro cubo è la millesima parte del metro cubo: quindi dividendo il numero proposto per mille, si troverà che 35458 decimetri cubi fanno 35·458 metri cubi.

199. Si domanda quanto pesi un decimetro cubo, ossia un litro di acqua pura alla temperatura di 4 gradi. Il grammo (182) è il peso di un centimetro cubo di acqua; ma il decimetro cubo è un dado che ha per lato un decimetro, ossia 10 centimetri lineari, per ciò contiene $10\times10\times10=1000$ centimetri cubi: quindi un decimetro cubo d'acqua peserà 1000 grammi, ossia un chilogrammo.

200. Quanto pesa un metro cubo d'acqua pura a 4 gradi? Un metro cubo contiene mille decimetri cubi, ma (esempio precedente) un decimetro cubo d'acqua pesa un chilogrammo: dunque un metro cubo d'acqua peserà mille chilogrammi = 100 miriagrammi = 10 quintali = una tonnellata.

201. Quanto pesa un decimetro cubo d'oro? Trovano i fisici che il peso specifico dell'oro è 19, il che vuol dire che l'oro puro pesa 19 volte quanto un eguale volume d'acqua. Ora un decimetro cubo d'acqua pesa un chilogrammo: dunque lo stesso volume d'oro peserà 19 chilogrammi.

202. *NB*. Allorquando si tratta di esprimere un numero qualunque di unità del sistema metrico decimale in altre unità dello stesso sistema che siano moltiple o sottomoltiple di quelle, l'operazione si fa con un semplice trasporto di punto. Così nell'esempio del num. 188, ove si trattava di esprimere 38155 grammi in chilogrammi, basta trasportare il punto dalla destra del numero 38155, ove è sottinteso, di tre posti a sinistra.

L'ultima cifra del numero dato 38155 esprime grammi; la penultima esprime un valore decuplo, e perciò decagrammi; la terz'ultima ettogrammi; la quart'ultima chilogrammi, e così di seguito. Quindi sarà facile di comprendere che (185) $38155^{g} = 3815^{Dg}{\cdot}5 = 381^{Eg}{\cdot}55 = 38^{Cg}{\cdot}155 = 3^{Mg}{\cdot}8155 = 0^{q}{\cdot}38155 = 0^{t}{\cdot}038155 = 381550^{dg} = 3815500^{cg} = 38155000^{mg}$.

Simili trasformazioni si possono eseguire su tutte le specie di misure metriche decimali. Trattandosi però di superficie e di volumi espressi in metri, decimetri centimetri, millimetri, decametri, ettometri, ecc., quadrati o cubici, bisogna ricordare che ci vogliono 100 quadrati di un'unità lineare per fare il quadrato dell'unità lineare immediatamente superiore, e mille cubi di un'unità lineare per fare il cubo dell'unità immediatamente superiore. Quindi sarà facile riconoscere che, per esempio, $0^{mq}{\cdot}158 = 15^{dmq}{\cdot}8 = 1580^{cmq} = 0^{Dmq}{\cdot}00158$. Egualmente $37908^{dmc} = 37^{mc}{\cdot}908 = 0^{Dmc}{\cdot}037908$, ecc.

CAPO VII

NUMERI COMPLESSI

§ 1. Preliminari.

203. Comprenderemo più facilmente dagli esempi (*) che dalla definizione in che consistano i numeri complessi. Tre rubbi, cinque libbre ed otto once formano

(*) Gli esempi di questo Capo si riferiscono tutti a misure torinesi scelte nella Tavola dell'Appendice.

un numero complesso. Così pure sono numeri complessi i seguenti: 20 trabucchi, 5 piedi, 7 once; 30 brente, 25 pinte; una lira e due soldi, ecc., ecc. Risultano pertanto i numeri complessi da numeri che si riferiscono ad unità d'ordini differenti, le quali sono suddivisioni le une delle altre.

204. Un numero complesso si riduce in frazione ordinaria equivalente in parti dell'unità sua principale col ridurlo nelle sue unità dell'infima specie, e dividendo il numero che si ottiene pel numero delle unità dell'infima specie necessarie per fare un'unità principale. Così si troverà che tre lire, 10 soldi, 6 denari valgono $\frac{846}{240}$ di lira, ossia $\frac{141}{40}$ di lira. Infatti 3 lire e 10 soldi fanno 70 soldi; i quali moltiplicati per 12, danno 840 denari, che coi sei denari fanno 846 denari; ma ogni denaro è la 240ª parte della lira: dunque sarà

$$3^{ll.}\ 10^{ss.}\ 6^{den.} = \frac{846}{240} = \frac{141}{40} \text{ di lira.}$$

Questa regola è generale e serve per qualunque numero complesso.

205. Viceversa, una frazione ordinaria si riduce in numero complesso equivalente, dividendo il numeratore pel denominatore; il quoziente intiero rappresenterà le unità principali del quoziente; il resto si ridurrà in unità di second'ordine, moltiplicandolo pel numero delle unità di quest' ordine necessarie per fare un'unità principale; il prodotto si dividerà pel denominatore della frazione data, ed il quoziente intiero che si troverà rappresenterà le unità di second'ordine del quoziente. Se vi sarà resto, si ridurrà in unità di terz' ordine, e si continuerà allo stesso modo la divisione, finchè sia compiuta, ovvero finchè siansi ottenute al quoziente le unità dell'ordine mi-

nimo di cui si vuole tener conto. Il resto ulteriore si scriverà a destra del quoziente, indicandone la divisione pel denominatore della frazione data, e rappresenterà parti dell'unità dell'infima specie. Così la frazione $\frac{141}{40}$ di lira, ottenuta nell'esempio del numero precedente, si ridurrebbe in lire, soldi e denari come segue:

141	40
120	$3^{ll}\ 10^{ss}\ 6^{d.}$
21	
20	
420	
40	
20	
12	
240	
240	
0	

Si divide il 141 per 40; il quoziente intiero 3 rappresenterà le lire; il resto 21 si moltiplica per 20 onde ridurlo in soldi, e si ottengono soldi 420, che divisi per 40 dànno 10 soldi al quoziente col resto 20. Moltiplico questo resto per 12 onde ridurlo in denari. Il prodotto 240 diviso per 40 mi dà al quoziente 6 denari col resto zero. Onde $\frac{141}{40}$ di lira equivalgono a lire 3, soldi 10, denari 6, ciò che già sapevamo dall'esempio precedente.

206. Sapendo in tale modo ridurre ogni numero complesso in frazione ordinaria equivalente, ed ogni frazione ordinaria in numero complesso, sarà facile eseguire qualunque operazione dell' aritmetica sui

numeri complessi. Basterà ridurre questi in frazione ordinaria dell' unità principale, fare sulle frazioni ordinarie ottenute le operazioni richieste, e ridurre il risultato finale, che sarà una frazione ordinaria, in numero complesso equivalente.

Esempio: 3 rubbi, 5 libbre e 2 once di una merce costano 17 lire e 7 soldi; si domanda quanto costi ciascun rubbo.

Egli è chiaro che converrà fare di 17 lire e 7 soldi tante parti eguali quante unità sono in 3 rubbi, 5 libbre e 2 once, ossia si dovrà dividere 17 lire e 7 soldi per 3 rubbi, 5 libbre e 2 once. Ciò posto, secondo la regola sopra enunciata, 17 lire e 7 soldi valgono $\frac{347}{20}$ di lira; e 3 rubbi, 5 libbre e 2 once valgono $\frac{962}{300}=\frac{481}{150}$ di rubbo. Dividendo secondo la regola delle frazioni ordinarie $\frac{347}{20}$ per $\frac{481}{150}$, si ottiene pel quoziente

$$\frac{347\times150}{481\times20}=\frac{347\times15}{481\times2}=\frac{5205}{962}.$$

Riducendo pertanto la frazione $\frac{5205}{962}$ in lire, soldi e denari, si avrà, pel prezzo domandato di ciascun rubbo di quella merce, 5 lire, 8 soldi, 2 denari e $\frac{524}{962}$ di denaro.

In questa maniera si potrebbero pertanto risolvere tutte le quistioni aritmetiche relative ai numeri complessi; ma vi sono metodi più speditivi, che passerò ad esporre.

---

§ 2. Addizione.

207. Per addizionare i numeri complessi bisogna scriverli gli uni sotto gli altri in modo che le unità della medesima specie siano tutte in una medesima colonna verticale; dopo si tira sotto di essi una linea orizzontale per separarli dalla somma, e cominciando dalla prima colonna a destra e andando verso sinistra, si sommano insieme tutte le unità della medesima specie, scrivendo sotto la linea nella colonna rispettiva ciascuna somma, ove il valore di questa sia minore di una delle unità dell'ordine immediatamente superiore. In caso che la detta somma non sia minore di una di queste unità, si scomporrà la medesima in unità dell'ordine immediatamente superiore ed in unità dell'ordine stesso su cui si opera. Queste ultime si scrivono sotto la linea nella colonna su cui si opera, e le altre si ritengono per riunirle alla somma della colonna seguente verso sinistra. Il seguente esempio renderà chiara la regola:

rubbi	libbre	once	ottavi
7	15	5	3
17	3	8	5
9	7	1	2
12	10	11	7
46	12	3	1

La somma degli ottavi è 17, e vale 2 once ed un ottavo. Si scrive 1 sotto la linea, si ritengono 2 once per unirle alla somma della colonna delle once, la quale somma essendo 25 accresciuta delle

2 once ritenute, fa 27 once, e vale 2 libbre e 3 once. Si scrivono le 3 once sotto la linea e si uniscono le 2 libbre alla somma della colonna delle libbre, la quale, colle due libbre ritenute, dando 37 libbre, scompongo questa somma in un rubbo e 12 libbre. Scrivo queste ultime sotto la linea, ed unisco il rubbo alla colonna de' rubbi, la quale ci darà 46 rubbi. Ecco altri esempi:

trab.	piedi	once
19	5	8
21	3	2
15	1	0
1	0	10
57	4	8

tavole	piedi	once
27	11	7
5	1	3
7	9	5
0	8	11
23	1	0
64	8	2

§ 3. Sottrazione

208. Per fare la sottrazione de'numeri complessi, si scrive il sottraendo sotto al minuendo in modo che le unità della medesima specie siano nella medesima colonna verticale; si tira sotto al sottraendo una linea per separarlo dal resto; indi incominciando a destra e andando verso sinistra, si levano le unità di ciascuna specie del sottraendo dalle unità rispettive del minuendo, e si scrivono i resti sotto la linea nelle colonne rispettive. In caso che le unità di un ordine qualsivoglia del sottraendo siano in numero maggiore che le unità corrispondenti del minuendo, per rendere possibile la sottrazione, si accresceranno le dette unità del mi-

nuendo di tante unità della loro specie quante sono necessarie per formare un'unità dell'ordine immediatamente superiore, e si diminuirà d'una unità il numero che nel minuendo rappresenta le unità della specie immediatamente superiore a quella su cui si opera. Ecco un esempio:

	rubbi	libbre	once	ottavi
minuendo	27	5	7	3
sottraendo	5	11	8	7
resto	21	18	10	4

Dopo di avere scritto il minuendo sopra il sottraendo, come si vede, si devono levare i sette ottavi del sottraendo dai tre ottavi del minuendo, il che non si può. Per rendere possibile la sottrazione, tolgo un' oncia dalle 7 once del minuendo, la quale fa otto ottavi, e l' unisco ai tre ottavi; ottengo così 11 ottavi, dai quali sottraendo 7 ottavi, mi resta 4 ottavi che scrivo sotto la linea. Si noti che le 7 once del minuendo saranno così divenute 6 once, dalle quali non potendo sottrarre le 8 once del sottraendo, prendo dalle cinque libbre del minuendo una libbra, la quale fa 12 once, e l'unisco alle 6 once; ottengo 18 once, che diminuite di 8 once fanno 10 once, le quali si scrivono sotto la linea. Si dovranno ora levare le 11 libbre del sottraendo dalle 4 del minuendo. Per ciò fare si prenda un rubbo dai 27 rubbi del minuendo, si riduca in libbre e si unisca alle 4 libbre: si avranno così 29 libbre, le quali diminuite di 11 fanno 18 libbre che si scrivono sotto la linea. Finalmente sottraggo 5 rubbi da 26 rubbi, e ottengo il resto 21 rubbi che si scrive pure sotto la linea.

Ecco altri esempi:

trab.	piedi	once		lire	soldi	denari
29	4	10		80	0	4
19	5	9		59	3	9
9	5	1		20	16	7

In quest'ultimo esempio dopo di avere sottratto 9 denari da 16 denari, bisognerebbe diminuire di un' unità i *zero* soldi del minuendo, il che non si può. Si prende una lira sulle 80; e si porta nella colonna dei soldi, ed invece di contarla 20 soldi, essa non si conta che 19.

§ 4. Moltiplicazione.

209. Spiegherò il metodo della moltiplicazione dei numeri complessi, detto *delle parti aliquote*, sopra esempi speciali, i quali basteranno per far comprendere la regola generale. Diconsi parti aliquote d'un numero tutti i divisori di esso; parte aliquota è sinonimo di divisore, di fattore e di sottomoltiplo (51).

Notisi che nella moltiplicazione dei numeri concreti il prodotto è sempre della stessa natura del moltiplicando, non essendo altro che il moltiplicando stesso ripetuto tante volte quante unità sono nel moltiplicatore. Quest'ultimo si riguarda come numero astratto (26).

Quindi in questo genere di moltiplicazioni allorchè il moltiplicando ed il moltiplicatore sono eterogenei, non è lecito di mutare l'ordine de' fattori scambiando il moltiplicatore col moltiplicando. Invero così facendo ed operando giusta le norme che spiegherò, si otterrebbe un prodotto, il quale invece di essere della natura del moltiplicando dato dalla quistione,

sarebbe della natura del moltiplicatore. I due prodotti però ottenuti col prendere successivamente i fattori in ordine differente sono fra loro eguali, ove si riguardino come numeri astratti, ovvero si riducano in una frazione ordinaria dell'unità principale (204).

Il caso più semplice della moltiplicazione de'numeri complessi è quello in cui il moltiplicatore è un numero intiero o non complesso. Il secondo caso della stessa moltiplicazione è quello in cui il moltiplicatore è complesso. Cominciando pertanto dal primo caso, sia da moltiplicare il numero 17 lire, 13 soldi e 6 denari per 16. L'operazione si disporrà e si farà nel modo che segue:

17ll.	13ss.	6den.
16		
102		
17		
8		
1	12	
0	16	
0	8	
282ll.	16ss.	

Scrivo il moltiplicando sopra, e sotto il moltiplicatore. Dovendo ripetere 16 volte 17 lire, 13 soldi e 6 denari, comincio a moltiplicare le 17 lire per 16, e ottengo i due prodotti parziali 102 unità e 17 decine. Resta ora da moltiplicare ancora 13 soldi e 6 denari per 16.

Per fare questa operazione, ragiono così: se dovessi moltiplicare una lira per 16, otterrei 16 lire; ma invece di una lira ho 13 soldi e 6 denari; prendo su questa quantità dieci soldi che sono una parte

aliquota della lira e precisamente una mezza lira. Se una lira moltiplicata per 16 mi dà 16 lire, 10 soldi mi daranno la metà di 16 lire, ossia 8 lire. Scrivo il prodotto parziale 8 lire, e così si saranno già moltiplicate 17 lire e 10 soldi per 16. Restano ancora nel moltiplicando 3 soldi e 6 denari. Comincio a prendere su questa quantità 2 soldi che sono la quinta parte di 10 soldi. Se dieci soldi mi hanno dato il prodotto di otto lire, due soldi mi daranno il quinto di 8 lire, ossia 1 lira e 12 soldi, che scrivo cogli altri prodotti parziali. Restano ancora nel moltiplicando 1 soldo e 6 denari. Due soldi hanno dato al prodotto 1 lira e 12 soldi, dunque un soldo darà la metà di 1 e 12, ossia darà 0 lire e 16 soldi. Finalmente 6 denari, che sono la metà d'un soldo, danno la metà di 16 soldi, ossia 8 soldi. Trovati così tutti i prodotti parziali, si sommano insieme e si forma il prodotto totale che è di 282 lire e 16 soldi.

Siano ancora da moltiplicare 29 rubbi, 16 libbre e 11 oncie per 40. Ecco l'operazione:

29rubbi	16libb.	11onc.
40		
1160		
8		
8		
8		
1	15	
0	20	
0	10	
0	6	8
1187rubbi	1libb.	8onc.

Scritti i fattori l'uno sotto l'altro, come si vede, comincio a moltiplicare 29 rubbi per 40, e ottengo il prodotto parziale di 1160 rubbi. Restano da moltiplicarsi per 40 16 libre e 11 once. Si prendano su questa quantità 5 libbre, che sono il quinto del rubbo. Un rubbo moltiplicato per 40 darebbe 40 rubbi: dunque 5 libbre daranno il quinto di 40 rubbi, ossia 8 rubbi, che si scrivono abbasso. Questo prodotto parziale si ripete 3 volte, perchè nelle 16 libbre vi sono tre volte 5 libbre. Ciò fatto, resteranno ancora al moltiplicando una libbra e 11 once. Cinque libbre hanno dato al prodotto 8 rubbi, una libbra darà il quinto di 8 rubbi, ossia un rubbo e 15 libbre, che scrivo sotto. Restano al moltiplicando 11 once; comincio a moltiplicare 6 once, che sono una mezza libbra, e daranno la metà di quel che ha dato la libbra, ossia 0 rubbi, 20 libbre. Sulle restanti 5 once prendo 3 once, che sono la metà di 6 once, e mi daranno la metà di 20 libbre, ossia 10 libbre. Finalmente le due once, che restano nel moltiplicando, sono il terzo di 6 once; ora 6 once hanno dato 20 libbre: dunque due once daranno il terzo di 20 libbre, ossia 6 libbre e 8 once. Ottenuti in tale modo tutti i prodotti parziali, li sommo insieme e ottengo il prodotto totale, che è di 1187 rubbi, 1 libbra e 8 once.

210. Passiamo ora al secondo caso della moltiplicazione, e sia da moltiplicare il numero 12 rubbi, 11 libbre, 9 oncie per 7 lire, 14 soldi e 3 denari. Ecco l'operazione:

	rubbi	libb.	oncie	
	12 rubbi	11 libb.	9 oncie	
	7 lire	14 soldi	3 den.	
	84			
per 5 libb. .	1	10		
per 5 libb. .	1	10		
per 1 libb. .	0	7		
per 6 onc. .	0	3	6	
per 3 onc. .	0	1	9	
per 10 sol. .	6	5	10 $\frac{1}{2}$	$\frac{40}{80}$
per 4 sol. .	2	12	4 $\frac{1}{5}$	$\frac{16}{80}$
per 3 den. .	0	3	10 $\frac{61}{80}$	$\frac{61}{80}$
	96	4	4 $\frac{37}{80}$	

Scritti i fattori come si vede, comincio a moltiplicare il moltiplicando per 7 allo stesso modo che nel caso precedentemente spiegato, ed ottengo i primi sei prodotti parziali che si veggono qui sopra, corrispondenti rispettivamente a 12 rubbi, 5 libbre, 5 libbre, 1 libbra, 6 once, 3 once.

Resta ancora da moltiplicare tutto il moltiplicando per 14 soldi e 3 denari. Per ciò fare ragiono così: Se il moltiplicatore fosse una lira, mi darebbe al prodotto una volta il moltiplicando; invece di 14 soldi e di 3 denari, prendo 10 soldi, i quali valendo una mezza lira mi daranno la metà del moltiplicando, ossia 6 rubbi, 5 libbre, 10 once e $\frac{1}{2}$.

Quattro soldi poi che restano al moltiplicatore, essendo la quinta parte di una lira, daranno il quinto del moltiplicando, ossia 2 rubbi, 12 libbre, 4 once e $\frac{1}{5}$.

Finalmente i 3 denari del moltiplicatore, essendo la sedicesima parte di 4 soldi, daranno il sedicesimo di ciò che hanno dato i 4 soldi, ossia daranno 0 rubbi, 3 libbre, 10 once e $\frac{61}{80}$ di oncia. Sommando

ora tutti i prodotti parziali, si avrà il prodotto totale di 96 rubbi, 4 libbre, 4 once e $\frac{37}{80}$ di oncia. Si noti che, per sommare le frazioni di oncia, si sono queste ridotte allo stesso denominatore, e dalla somma si sono tolti gli intieri.

Allo stesso modo si troverà il prodotto dell'esempio seguente e di qualunque altro della moltiplicazione dei numeri complessi.

	31 ll. 9 trab.	19 sol. 4 piedi	10 den. 11 onc.	
per 31 lira	279			
per 10 sol.	4	10		
per 5 sol.	2	5		
per 4 sol.	1	16		
per 6 den.	0	4	6	
per 3 den.	0	2	3	
per 1 den.	0	0	9	
per 3 piedi	15	19	11	
per 1 piede	5	6	7 $\frac{2}{3}$	$\frac{24}{36}$
per 6 once	2	13	3 $\frac{5}{6}$	$\frac{30}{36}$
per 4 once	1	15	6 $\frac{5}{9}$	$\frac{20}{36}$
per 1 oncia	0	8	10 $\frac{23}{36}$	$\frac{23}{36}$
	314 ll.	2 sol.	9 d. $\frac{25}{36}$.	

§ 5. Divisione.

211. Nella divisione dei numeri complessi distinguonsi due casi: 1° Quello in cui il dividendo ed il divisore sono di specie differenti; 2° Quello in cui il dividendo ed il divisore sono omogenei.

1° *Caso.* In questo primo caso il quoziente è sempre della natura del dividendo. Infatti il prodotto del quoziente pel divisore dovendo dare il dividendo. necessariamente il quoziente o il divisore dovrà essere della natura del dividendo; ma non essendo il divisore, lo sarà dunque il quoziente. Ciò premesso, se il divisore sarà un numero intiero o non complesso, si divideranno le unità principali del dividendo pel divisore e il quoziente intiero, che si troverà, rappresenterà le unità principali del quoziente. Il resto, se vi sarà, si ridurrà in unità di seconda specie del dividendo, e vi si aggiungeranno le unità che già si hanno nel dividendo della specie medesima, e si formerà così un nuovo dividendo parziale, il quale, diviso pel divisore, darà le unità di secondo ordine del quoziente. Il resto, se vi sarà, si ridurrà in unità di terzo ordine, e si continuerà allo stesso modo, finchè si arrivi alle unità dell'ordine infimo, di cui si vuole tener conto nel quoziente.

Esempio. Sia da dividere il numero 39 trabucchi, 5 piedi e 9 once per 15. Ecco l'operazione:

$$
\begin{array}{l|l}
39^{trab.}\ 5^{piedi}\ 9^{once} & 15 \\
\underline{30} & 2^{trab.}\ 3^{piedi}\ 11^{once}\ \frac{12}{15} \\
9 & \\
\underline{6} & \\
54 & \\
\underline{5} & \\
59 & \\
\underline{45} & \\
14 & \\
\underline{12} & \\
168 & \\
\underline{9} & \\
177 & \\
\underline{15} & \\
27 & \\
\underline{15} & \\
12 &
\end{array}
$$

Divido 39 trabucchi per 15, e trovo 2 trabucchi al quoziente col resto 9, il quale moltiplicato per 6 mi dà 54 piedi. A questi aggiungo i 5 piedi del dividendo e ottengo 59 piedi. Li divido per 15 e ne risulta pel quoziente 3 piedi col resto di 14 piedi, i quali moltiplicati per 12 si riducono in 168 once, che colle 9 once del dividendo fanno 177. Divido questo numero per 15, e trovo al quoziente 11 once col resto di 12 da dividere per 15, che fa $\frac{12}{15}$ di oncia, ossia $\frac{4}{5}$ di oncia.

212. Se poi il divisore è complesso, si farà la divisione riducendo questo in frazione ordinaria, moltiplicando il dividendo pel denominatore di tale frazione, e dividendo il prodotto che si ottiene pel numeratore della frazione medesima. La ragione di

questa operazione è posta nella regola sopra dimostrata, relativa alla divisione di un numero qualsivoglia per una frazione (140).

Esempio. Si vuole dividere il numero 7 rubbi, 5 libbre e 10 once per 3 lire e 2 soldi. Il divisore ridotto in frazione ordinaria fa $\frac{62}{20}$ ossia $\frac{31}{10}$ di lira. Moltiplico dunque 7 rubbi, 5 libbre e 10 once per 10, denominatore del divisore:

	rubbi	libbre	once
	7	5	10
	10		
	70		
per 5 libb.	2		
per 10 once	0	8	4
prodotto	72	8	4

Questo prodotto 72 rubbi, 8 libbre e 4 once, si divide per 31, numeratore del divisore proposto, e dà il quoziente cercato uguale a due rubbi, 8 libbre e 4 once, come si vede coll'operazione seguente:

```
72rubbi  8libb.  4once   | 31
                         |-------------------
 62                        2rubbi 8libb. 4once
---
 10
 25
---
250
  8
---
258
248
---
 10
 12
---
120
  4
---
124
124
---
  0
```

Digitized by Google

213. 2° *Caso*. Se il dividendo e il divisore sono della stessa natura, la natura del quoziente verrà determinata dallo stato della questione. In questo caso la divisione si fa riducendo il dividendo e il divisore nelle loro unità dell'infima specie, e si avranno così due numeri intieri da dividere l'un per l'altro. Si svilupperà il quoziente nelle unità della natura determinata dalla quistione, al modo che si è insegnato parlando della riduzione di una frazione ordinaria in un numero complesso (205).

La legittimità di questa operazione si riconosce osservando che, se si riducono ambidue i termini della divisione nelle loro unità dell'infima specie (il che torna allo stesso che moltiplicarli ambidue per uno stesso numero, che è quello delle unità di infima specie necessarie per fare un'unità della specie principale), il quoziente non viene alterato (46).

Esempio. Con 5 lire, 16 soldi e 8 denari si compera un rubbo di una merce; si domanda quanti rubbi si compreranno della stessa merce con 50 lire, 2 soldi e 6 denari. Egli è chiaro che si compreranno tanti rubbi quante volte 5 lire, 16 soldi e 8 denari entrano in 50 lire, 2 soldi e 6 denari. Si divida pertanto questo numero pel precedente, ed il quoziente che si troverà sarà il numero cercato dei rubbi. Per fare questa divisione, riduco il dividendo e il divisore in denari, che sono le unità d'infima specie de' medesimi. Il dividendo mi darà 12030 denari, il divisore 1400. Divido pertanto il numero 12030 per 1400, oppure, ciò che torna allo stesso, 1203 per 140, e sviluppo il quoziente in rubbi, libbre e once, come si vede qui sotto:

```
1203   | 140
1120   |--------------------------------
----   8rubbi  14libb.  9once + 120/140
  83
  25
----
 415
166
----
2075
140
----
 675
 560
----
 115
  12
----
 230
115
----
1380
1260
----
 120
```

Si compreranno adunque 8 rubbi, 14 libbre, 9 once e $\frac{120}{140}$ ossia $\frac{6}{7}$ di oncia.

CAPO VIII

—

RAPPRESENTAZIONE DEI NUMERI

CON LETTERE DELL'ALFABETO

214. Fino a qui, salvo poche eccezioni, abbiamo espresso le quantità con numeri; ma nulla osta di rappresentarle con qualunque altro simbolo. I matematici usano frequentemente per questa rappresentazione le lettere dell'alfabeto. Così un numero qualunque può designarsi con a, un altro con b, e via dicendo. Le operazioni aritmetiche sopra le quantità così espresse non possono più effettuarsi come sui numeri, fondendo le quantità stesse, per così dire, insieme le une colle altre; ma possono sempre indicarsi con segni appropriati (15). I risultati di tale indicazione fanno sovente scoprire tra le quantità relazioni utilissime nella pratica. La parte della matematica in cui più specialmente si studiano queste relazioni dicesi *Algebra*.

215. *Addizione e sottrazione*. Siano due quantità rappresentate una da a, l'altra da b. La loro somma si indica con $a+b$, la loro differenza con $a-b$. Finchè ad a e b non si attribuiscono valori numerici particolari è impossibile determinare il valore numerico di $a+b$, o di $a-b$. Non tralasciano però queste due espressioni di significare, nel primo caso, che alla quantità rappresentata da a si deve aggiungere la quantità rappresentata da b; e nel secondo caso, che dalla quantità rappresentata da a si deve togliere la quantità rappresentata da b. Se fosse, ad esempio,

$a=5$, $b=3$, si troverebbe $a+b=8$, e $a-b=2$. Supponiamo ora che alla quantità rappresentata da $a+b$ si voglia aggiungere la quantità rappresentata da $c-d$. La somma si indicherebbe con $a+b+c-d$; e ben si scorge che per sommare due o più quantità comunque espresse, basta scriverle le une di seguito alle altre interponendo il segno *più* tra due qualunque consecutive.

Una quantità separata dalle altre coi segni *più* o *meno* dicesi *termine*. Così nell'espressione ora scritta $a+b+c-d$ vi sono quattro termini. Un'espressione di un solo termine dicesi *monomio*, di due termini *binomio*, di tre *trinomio*, e in generale di più termini *polinomio*. Allorchè il primo termine di un polinomio è positivo, non è necessario di scrivere il segno *più*, che lo affetta.

Si vogliano sommare le due espressioni $a-b$, e $-c+d$. Applicando materialmente la regola sopra esposta, si avrebbe pel risultato $a-b+-c+d$, e ben si comprende che $+-c$ fa $-c$, onde basterà scrivere per somma $a-b-c+d$. Quindi la regola per sommare monomi o polinomi qualunque è di scrivere questi monomi o polinomi gli uni di seguito agli altri coi loro segni rispettivi in modo da farne un solo polinomio.

La quantità $a-b$ significa la sottrazione di b da a. Se si dovesse levar via $b+c$ da a, la sottrazione potrebbe indicarsi con $a-(b+c)$.

Qui la quantità $b+c$ si è scritta tra parentesi per far vedere che il segno *meno* si riferisce all'intiero binomio $b+c$. e non al solo termine b. Per eseguire questa sottrazione osservo che devesi levare da a non solo b, ma ancora insieme c; ma, tolto b da a, rimane $a-b$, e togliendo da questo residuo ancora c,

avremo il risultato cercato $a-b-c$ che vale quanto $a-(b+c)$.

Se da a si volesse togliere $b-c$, si avrebbe $a-(b-c)$; ed osservando che se si toglie b da a rimane $a-b$, e che non si doveva togliere l'intiera quantità rappresentata da b, bensì questa quantità diminuita di c, così si scorge che col togliere b da a, in questo caso si toglie c di troppo, e che per ottenere il resto della proposta sottrazione conviene aggiungere c ad $a-b$. Quindi sarà

$$a-(b-c)=a-b+c.$$

I due esempi arrecati di sottrazioni ci conducono alla regola seguente: La sottrazione algebrica si fa scrivendo dietro al minuendo il sottraendo coi segni cambiati.

Esempio: minuendo $a+b-c$
sottraendo $d-e+f$
resto $a+b-c-d+e-f$.

La somma di $a+a$ si rappresenta con $2a$; egualmente $a+a+a$ vale quanto $3a$. In generale quando una quantità si deve ripetere due o più volte col segno $+$, si scrive una volta sola con a sinistra il numero che indica quante volte ella dev' essere ripetuta. Questo numero dicesi *coefficiente*. Onde coefficiente è il numero che indica quante volte dev'essere ripetuta la quantità che gli sta a destra. Dietro questa definizione si scorge che

$$3a+5a=8a,$$
$$7a-3a+2b-b=4a+b,$$
$$a-b+2a+3b=3a+2b,$$
$$a-8a=-7a.$$

Le semplificazioni fatte negli esempi precedenti si dicono *riduzione de' termini simili*. Nell'ultimo esempio

il risultato della riduzione è *negativo*, ossia affetto dal segno *meno;* ed invero non si può togliere $8a$ da a, ma tolto un a da a, si ha *zero* con $7a$ ancora da togliere o sottrarre, ed il risultato $-7a$ indica appunto questa cosa.

216. *Moltiplicazione.* Il prodotto di a per b si indica con $a \times b$, ovvero con ab, che vale quanto a volte b, o b volte a. Il prodotto di a per a è$=a \times a =aa=a^2$ per la definizione del num. 32. L'espressione a^3bc significa il prodotto del cubo di a per b e per c. La espressione $7a^3bc$ significa il prodotto precedente ripetuto 7 volte. Aggiungendo queste nozioni a quanto si è detto precedentemente, si scorge che un monomio o termine qualunque contiène in generale quattro elementi; 1º il segno *più* o *meno*, 2º il coefficiente, 3º la lettera o le lettere, 4º l'esponente o gli esponenti.

Diconsi *termini simili* quelli che contengono le stesse lettere affette rispettivamente dagli stessi esponenti. Così $+5a^2b$ e$-3a^2b$ sono due termini simili; la loro somma farebbe $2a^2b$. I due termini $4a^2b^3$ e $4a^3b^2$ non sono simili. Egli è sui termini simili che si può fare la riduzione sopra insegnata.

Sia la quantità a^2 da moltiplicare per a, il risultato è $a^2 \times a=a^2a=aaa=a^3$, egualmente $a^2 \times a^3=aaaaa =a^5$. Ciò fa dire che nella moltiplicazione dei monomi le lettere simili si scrivono una volta sola nel prodotto, ed i loro esponenti si sommano. Questa è la regola detta degli esponenti.

Il prodotto di b^2 per a^3 non si può che indicare con a^3b^2; quindi nella moltiplicazione dei monomi le lettere dissimili si scrivono nel prodotto le une accanto alle altre coi loro esponenti rispettivi. Ciò costituisce la regola delle lettere.

Il prodotto di $5a$ per $7b$, è $5a\times7b$; ma ricordando che l'ordine dei fattori non influisce sul prodotto, si scorge che sarà $5a\times7b=5\times7\times a\times b=35ab$, il che fa dire che nella moltiplicazione dei monomi i coefficienti si moltiplicano tra di loro; e questa è la regola dei coefficienti.

Resta da dare la regola de'segni. Sia la quantità a da moltiplicare per $b-c$, operazione che s'indica con $a\times(b-c)$ o meglio con $a(b-c)$. Ciò significa che bisogna ripetere $b-c$ volte a, ossia b volte, meno c volte a; ma b volte a fa ba o ab, e c volte a fa ca o ac, e dovendo sottrarre questo prodotto dal primo, il risultato della moltiplicazione indicata sarà $ab-ac$. È dunque $a\,(b-c)=ab-ac$. E siccome il prodotto non cambia col mutar l'ordine dei fattori, così sarà pure $(b-c)a=ab-ac$. Sia ora da moltiplicare $a-b$ per $c-d$, il che si indica con $(a-b)\,(c-d)$. Ciò significa che bisogna prendere c volte, meno d volte $a-b$; onde sarà

$$(a-b)(c-d)=(a-b)c-(a-b)d.$$

Ma per ciò che si è visto or ora $(a-b)c=ac-bc$ e $(a-b)d=ad-bd$; quindi sottraendo il secondo prodotto dal primo, si avrà $(a-b)(c-d)=ac-bc-ad+bd$. Esaminando questo risultato, si vede che il primo termine, $+ac$, nasce dal prodotto di $+a$ per $+c$; il secondo, $-bc$, dal prodotto di $-b$ per $+c$; il terzo, $-ad$, dal prodotto di $+a$ per $-d$; finalmente il quarto, $+bd$, dal prodotto di $-b$ per $-d$. Quindi risulta che *due fattori di egual segno dànno un prodotto positivo, e due fattori di segno contrario dànno un prodotto negativo*, il che costituisce la regola dei segni.

Per moltiplicare un polimonio per un monomio

basta moltiplicare i singoli termini del polinomio pel monomio moltiplicatore, e sommare i prodotti che si ottengono. Si moltiplica poi un polimonio per un altro col moltiplicare successivamente tutto il polinomio moltiplicando per ciascun termine del polinomio moltiplicatore, e sommando i prodotti parziali.

Applicando le precedenti regole, sarà facile di trovare i seguenti risultati:

$$(a+b)(a+b)=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a-b)(a-b)=(a-b)^2=a^2-2ab+b^2,$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$
$$(a+b)(a+b)(a+b)=(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

217. *Divisione dei monomi.* Ricordando che nella divisione il prodotto del divisore pel quoziente deve eguagliare il dividendo, sarà facile dedurre dalle regole della moltiplicazione le seguenti regole della divisione dei monomi:

1º I termini affetti da egual segno dànno un quoziente positivo, e i termini di segno contrario dànno un quoziente negativo.

2º Il coefficiente del quoziente si trova dividendo il coefficiente del dividendo per quello del divisore.

3º Le lettere che si trovano nel dividendo e non nel divisore si scrivono nel quoziente col loro esponente; quelle che si trovano nel dividendo e nel divisore collo stesso esponente non si scrivono punto nel quoziente; finalmente quelle che si trovano nei due termini con esponente differente si scrivono al quoziente con un esponente eguale a quello del dividendo diminuito di quello del divisore.

Quindi se una lettera ha nel divisore un esponente maggiore che nel dividendo, la divisione in intieri

non è possibile. Coll'aiuto delle regole precedenti è facile verificare i seguenti risultati:

$$25a^2b \div 5ab = 5a,$$
$$48abc^3d \div 6acd = 8bc^2,$$
$$7a^3b^2c \div 7a^3c = b^2,$$
$$a^2b^2 \div ab = ab.$$

218. *Frazioni*. Le frazioni letterali od algebriche si trattano precisamente come le numeriche. Così una frazione si semplifica sopprimendo i fattori comuni ai suoi due termini. Esempi:

$$\frac{4a^2}{6ab}=\frac{2a}{3b};\quad \frac{5ab^2c}{7abc}=\frac{5b}{7};\quad \frac{9a^2b^3}{63a^3b^2}=\frac{b}{7a}.$$

Così pure due o più frazioni si riducono allo stesso denominatore moltiplicando i due termini di ciascuna pel prodotto dei denominatori delle altre. Esempi:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd};\quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{adf}{bdf}+\frac{bcf}{bdf}+\frac{bde}{bdf}.$$

Le quattro operazioni sulle frazioni sono tutte comprese nel seguente quadro:

Addizione: $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$; $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$.

Sottrazione: $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$; $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$.

Moltiplicazione: $\frac{a}{b}\times c=\frac{ac}{b}$; $c\times\frac{a}{b}=\frac{ac}{b}$; $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.

Divisione: $\frac{a}{b}\div c=\frac{a}{bc}$; $c\div\frac{a}{b}=\frac{bc}{a}$; $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$.

219. *Eguaglianze*. Due quantità eguali scritte una di seguito all'altra col segno $=$ in mezzo costituiscono ciò che si chiama un'*eguaglianza*. Così se la somma rappresentata da $a+b$ è uguale a quella rappre-

sentata da $c+d$, si ha l'eguaglianza $a+b=c+d$. La quantità che sta dinanzi al segno $=$ dicesi *primo membro;* quella che sta dopo, *secondo membro* dell'eguaglianza.

Egli è evidente che aggiungendo o togliendo quantità eguali ai due membri di una eguaglianza, questa continua a sussistere. Così se si ha $a=b$, si avrà pure $a+c=b+c$, e $a-c=b-c$.

Egualmente non si distrugge l'eguaglianza moltiplicando o dividendo i due membri di essa per un medesimo numero. Cosicchè se si ha $a=b$, si avrà pure $ac=bc$ e $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$.

Inoltre possiamo elevare ambi i membri ad una medesima potenza (32), od estrarre da ambidue la radice quadrata (33), senza distrurre l'eguaglianza.

Quindi, data un'eguaglianza, si può portare, senza distrurla, un termine da un membro nell'altro, purchè gli si muti il segno. Infatti sia l'eguaglianza $a+b-c=e+f-g$, dico che trasportando il termine b, ad esempio, dal primo nel secondo membro, si avrà

$$a-c=e+f-g-b.$$

Invero sottraendo b da ambi i membri dell'eguaglianza data, essa si converte nella precedente. Egualmente per trasportare nell'eguaglianza data il termine $-g$, ad esempio, dal secondo nel primo membro, basta aggiungere ad ambi i membri g, e si ottiene

$$a+b-c+g=e+f.$$

In una eguaglianza contenente termini frazionari si fanno scomparire tutti i denominatori, moltiplicando ambi i membri, o ciò che torna allo stesso, tutti i termini dell'eguaglianza pel prodotto di tutti

i denominatori, o per un moltiplo qualunque comune a questi.

220. *NB.* È importante di far bene apprendere ai principianti i pochi principii algebrici contenuti nel presente Capo, onde possano bene intendere ciò che segue, e prepararsi alle operazioni più elevate dell'aritmetica. Chi desidera maggiori nozioni sui calcoli letterali può ricorrere al mio *Compendio d'Algebra*.

CAPO IX.

DEI SISTEMI DI NUMERAZIONE

221. *Rappresentazione di un numero mediante un polinomio ordinato secondo le potenze del* 10. Ricordando ciò che si è detto nel num. 7 intorno al sistema decimale di numerazione, è facile comprendere che, essendo 10 la base o l'unità di second'ordine, l'unità di terz'ordine sarà $10\times10=10^2$, quella di quarto ordine 10^3, di quinto ordine 10^4, di n^{esimo} ordine 10^{n-1}. Sia, ad esempio, il numero 3457; esso rappresenta 7 unità di primo ordine, 5 di 2^0, 4 di 3^0, 3 di 4^0. Dunque esso potrà esprimersi con

$$7+5\times10+4\times10^2+3\times10^3.$$

Allo stesso modo qualunque altro numero può rappresentarsi con un polinomio ordinato secondo le potenze crescenti o decrescenti del 10. Così sarà

$$1860=6\times10+8\times10^2+10^3.$$
$$30407=7+4\times10^2+3\times10^4.$$

In generale sia un numero espresso colle cifre ...*dcba*, che rappresento colle lettere dell'alfabeto, *a*, *b*, *c*, *d*, ecc., in modo che *a* sia la cifra delle unità di 1⁰ ordine, *b* di 2⁰, *c* di 3⁰, *d* di 4⁰, ecc.; si potrà quel numero esprimere con

$$a+b\times10+c\times10^2+d\times10^3+\text{ecc.}$$

Se alcuna delle cifre del numero è *zero*, scomparisce nel polinomio il termine relativo ad essa.

222. *Idea de' differenti sistemi di numerazione.* Una prima idea di ciò trovasi esposta nel numero 14. Per maggiore dilucidazione aggiungo qui quanto segue:

Sia il numero scritto, per esempio, nella base 5 colle cifre 2314 (*), e domandisi il suo valore nel sistema decimale. Per risolvere questo problema osservo che, essendo 5 la base o l'unità di second'ordine, l'unità di 3^0 ordine sarà 5^2, quella di 4^0 ordine 5^3, e così di seguito. Ora la cifra 4 del numero dato rappresenta le unità semplici, la cifra 1 quelle di 2^0 ordine, la cifra 3 quelle di 3^0 ordine, e finalmente la cifra 2 quelle di 4^0 ordine. Onde nel sistema quinario sarà:

$$2314=4+1\times5+3\times5^2+2\times5^3.$$

Eseguendo le operazioni indicate, si troverà pel numero decimale cercato 334.

Come si scorge, è facile la traduzione di un numero da un sistema qualunque nel sistema decimale, allorchè si conoscono le cifre con cui il numero è scritto, e la base relativa. Basta per ciò rappresentare il numero mediante un polinomio ordinato secondo le potenze della base, ed eseguire poscia le operazioni indicate.

(*) Badisi che non si potrebbe leggere due mila trecento quattordici, a meno di cambiare significato alle parole.

Il problema precedente si sarebbe potuto risolvere ancora comodamente così. Nel numero 2314 la cifra 2 rappresenta 2 unità di 4° ordine; ma nel sistema quinario o di base 5, due unità di 4° ordine valgono 10 di 3°, e in generale le unità di un ordine qualunque si riducono nelle unità dell'ordine immediatamente inferiore moltiplicandole per la base. Moltiplico adunque il 2 per 5, ed al prodotto 10 aggiungo le unità di 3° ordine 3, con che il numero dato si riduce a 13 unità di terzo ordine, una di secondo e quattro di primo. Moltiplico poi 13 per 5, ed al prodotto 65 aggiungo l'*uno*, e così riduco il numero dato in 66 unità di 2° ordine, e 4 di 1°. Finalmente moltiplico 66 per 5, ed al prodotto 330 aggiungo 4, ed ottengo il numero decimale 334 equivalente al numero che nella base 5 è scritto colle cifre 2314.

Il problema inverso, dato un numero decimale, scriverlo in una base diversa dal 10, si risolve pure facilmente. Sia da tradurre nella base 5 il numero decimale 334. Divido per 5 il 334, ed ottengo il quoziente 66 col resto 4; onde sarà $334=66\times5+4$, cosicchè il numero dato vale, nel sistema quinario, 66 unità di secondo ordine, più 4 di primo. Registro adunque il quattro nella colonna delle unità di 1° ordine, poi divido il 66 per 5, e trovo $66=13\times5+1$, il che mi fa conchiudere che le 66 unità di 2° ordine valgono 13 di 3°, più una di 2°. Scrivo dunque l'1 nella colonna delle unità di 2° ordine a sinistra del 4 già scritto, ed ottengo le due ultime cifre 14 del numero cercato. Divido poscia 13 per 5, e trovo $13=2\times5+3$, il che mi mostra che 13 unità di 3° ordine valgono 2 di 4°, e 3 di 3°; onde scrivo il 3 a sinistra delle cifre 14 già trovate, ed il 2 a

sinistra del 3; così è risoluto il problema, ed il numero cercato è 2314.

Ben si vede da questo esempio che per tradurre un numero dal sistema decimale in un altro sistema di base data, basta dividere successivamente il numero decimale per la nuova base, poi il quoziente ottenuto per la base stessa, poi ancora il secondo quoziente per la base, e così di seguito fino a che si arrivi ad un quoziente zero. I resti successivi di queste divisioni formano le unità degli ordini successivi del numero cercato. Se alcun resto è zero, è segno che manca nel numero cercato l'ordine delle unità corrispondenti, e si scrive zero in quella colonna.

Esempi. Scrivere il numero decimale 1860 nella base 7.

Si vede qui accanto come convenga disporre l'operazione. Sotto al numero dato stanno per ordine i quozienti successivi della divisione per 7, e a destra i residui rispettivi. Si trova così il numero domandato scritto colle cifre 5265.

1860	
265	5
37	6
5	2
0	5
5265.	

Viceversa, applicando la prima o la seconda regola sopra data, si troverebbe che il numero scritto colle cifre 5265 nella base 7, nella base 10 vale 1860.

Per iscrivere i numeri in una base maggiore del 10, bisogna creare nuovi segnali o cifre, poichè, come già si disse nel num. 14, in ogni sistema, per esprimere tutti i numeri in iscrittura, si richiedono tante cifre quante sono le unità nella base. Vogliasi, ad esempio, scrivere nella base 12 il numero decimale 5031. Si troverà che, chiamando a il 10, e b l'11, il numero cercato è scritto colle cifre $2ab3$.

Per tradurre un numero da una base qualunque

Digitized by Google

in un'altra qualunque diverse dal 10, si può cominciare a ridurre il numero dalla base primitiva nella base 10, poi da questa alla nuova base.

Ecco qui di seguito e con ordine i numeri dall'1 al 20 scritti nella base 4:

1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 33, 100, 101, 102, 103, 110.

CAPO X.

DELLE POTENZE E DELLE RADICI

§ 1. Del quadrato e della radice quadrata.

223. Abbiamo definito nel num. 32 che s'intenda per potenza in genere, e nel num. 33 che s'intenda per radice quadrata. Dobbiamo qui occuparci in modo più particolare del quadrato e della radice quadrata dei numeri.

224. *Quadrato della somma di due numeri.* Nel numero 216 abbiamo trovato il quadrato di $a+b$ eguale ad $a^2+2ab+b^2$. Questo risultato ci fa dire che il quadrato della somma di due numeri è uguale alla somma de' quadrati dei due numeri, più il doppio prodotto de' numeri stessi. Quindi se un numero si decompone in due parti, una di decine, l'altra di unità (16), il suo quadrato si comporrà del quadrato delle decine, più il doppio prodotto delle decine per le unità, più ancora il quadrato delle unità.

225. *Quadrato di un prodotto.* Il quadrato del prodotto di due o più fattori è eguale al prodotto dei quadrati de' singoli fattori. Infatti siano i fattori a, b, c; il quadrato del loro prodotto abc (216) si esprime con $(abc)^2 = abc \times abc = a^2b^2c^2$.

226. *Teoremi relativi ai quadrati.* 1° Se un numero quadrato ha un fattore primo, questo entra nel numero dato necessariamente un numero pari di volte. È questa una conseguenza del teorema del numero precedente. Quindi se un numero è divisibile una sola volta od un numero impari di volte per un fattore primo, esso non può essere un quadrato perfetto.

2° Un numero pari non divisibile per 4 non può essere un quadrato perfetto. È un corollario del teorema precedente.

3° Un numero impari, che, diminuito di un'unità, non sia divisibile per 8, non può essere un quadrato perfetto. Infatti ogni numero impari si può rappresentare (83) con $2n+1$, esprimendo n un numero qualunque intiero; ora il quadrato di $2n+1$ è (216) eguale a $4n^2+4n+1$; diminuendolo di 1, resta $4n^2+4n=4n(n+1)$, poichè eseguendo la moltiplicazione di $4n$ per $n+1$ si trova appunto $4n^2+4n$. Ora il fattore 4 è divisibile per 4; e degli altri due fattori n e $n+1$ uno necessariamente è pari e perciò divisibile per 2, poichè essi rappresentano due numeri consecutivi della serie dei numeri naturali; dunque il resto $4n^2+4n$ è sempre divisibile per 8, e sta la proposizione enunciata.

4° I quadrati de' dieci numeri da 1 a 10 terminano colle cifre 0, 1, 4, 5, 6, 9; dunque nessun numero quadrato perfetto può terminare colle cifre 2, 3, 7 e 8.

5º Un numero che termini con un numero impari di zeri non può essere quadrato perfetto, come non è pure un quadrato perfetto un numero di cui l'ultima cifra sia 5 e la penultima non sia 2.

6º La differenza de' quadrati di due numeri consecutivi, o differenti l'un dall'altro di un'unità, è uguale al doppio del minore de' due numeri, più *uno*. Infatti siano a e $a+1$ i due numeri; i loro quadrati sono a^2 e a^2+2a+1, la cui differenza è $2a+1$, ossia il doppio del numero minore più l'unità.

7º Il quadrato di un numero frazionario differente da un numero intiero non può essere un numero intiero. Infatti esprimiamo il numero frazionario dato colla frazione $\frac{a}{b}$ nella quale supporremo a e b numeri intieri primi fra di loro; sarà b necessariamente diverso dall'unità. Il quadrato di $\frac{a}{b}$ è $\frac{a^2}{b^2}$; ora a^2 non può contenere fattori primi diversi da quelli di a, nè b^2 diversi da quelli di b; dunque a^2 e b^2 sono primi fra di loro, ed il loro quoziente non può essere mai un numero intiero, essendo b diverso dall'unità.

8º Il quadrato di un numero negativo è uguale al quadrato dello stesso numero preso positivamente. Ciò risulta evidentemente dalla regola de' segni nella moltiplicazione (216). Così è:

$$-5\times-5=5\times5=25, \text{ ossia } (-5)^2=(5)^2=25.$$

227. La radice quadrata di un numero ha due valori, giacchè per l'8º teorema del numero precedente, il quadrato di due quantità eguali, ma di segno contrario, è lo stesso. Così la radice di 25 vale tanto $+5$ quanto -5.

228. La radice quadrata di un numero negativo non esiste, infatti qualunque numero negativo o positivo elevato al quadrato dà sempre una quantità positiva. Quindi $\sqrt{-25}$, per esempio, è simbolo di una quantità che dicono *immaginaria*.

229. La radice quadrata di un numero intiero, che non sia un quadrato perfetto, non si può esprimere nè con numeri intieri, nè con numeri frazionari aventi termini finiti, e si dice perciò una quantità *irrazionale* o *incommensurabile* coll'unità. Infatti essa non è un numero intiero, poichè il numero dato non è quadrato perfetto, e se una frazione potesse esprimere una tale radice quadrata, il quadrato di questa frazione sarebbe eguale ad un numero intiero, il che è contrario al 7° teorema del num. 218.

230. *Regola per estrarre la radice quadrata dai numeri intieri.* Esporrò questa regola applicandola ad alcuni esempi. Sia da estrarre la radice del numero 3249. Ecco l'operazione:

32,49	
25	57
74,9	107
74 9	7
0	

A destra del numero proposto si tira una linea verticale ed una orizzontale, come si vede qui sopra, e nell'angolo superiore di queste due linee si scrive la radice cercata. Notisi che allorquando la radice del numero proposto ha una sola cifra, essa deve sapersi trovare a mente. Converrà perciò che il principiante si fissi nella memoria i quadrati de' primi nove numeri naturali, che sono 1, 4, 9, 16, 25, 36,

Google

49, 64, 81. Il numero proposto si divide con virgole in parti di due cifre l'una, partendo da destra e andando verso sinistra. L'ultima parte a sinistra potrà avere anche una sola cifra. Nel nostro caso il numero proposto risulta diviso in due parti o membri di due cifre l'uno. Ciò premesso, ecco come si opera: si cerca il massimo quadrato perfetto in numeri intieri contenuto nel primo membro a sinistra 32. Tale quadrato è 25, la cui radice 5 si scrive nel luogo destinato per la radice e ne forma la prima cifra. Il quadrato 25 di questa prima cifra si sottrae dal primo membro 32; a canto al resto 7 si abbassa il secondo membro 49, formando così il numero 749, nel quale si separa con una virgola la cifra a destra. La parte 74, che è a sinistra di questa virgola, si divide pel doppio, 10, della radice trovata; il quoziente 7 ci darà la seconda cifra della radice cercata. Prima però di scrivere questa cifra al suo posto converrà provare se è buona, perchè talvolta il quoziente nominato può dare una cifra troppo grande. Si scrive perciò il 7 a destra del 10, che è il doppio della radice trovata, ed il numero risultante 107 si moltiplica per la stessa cifra 7, il prodotto si scrive sotto al numero 749, che ne era sopra risultato dopo di avere abbassato il secondo memero 49 del numero proposto, e si sottrae dal numero stesso. Se la sottrazione si può fare, la cifra trovata è buona e si scrive nella radice; in caso contrario, si diminuisce tale cifra di una unità, e si proverà di nuovo allo stesso modo se sarà buona o no. Nel nostro caso non solo la sottrazione si può fare, ma ancora il resto che si ottiene è nullo, il che significa che l'operazione è finita, e che la radice cercata è 57: infatti moltiplicando 57 per 57 si ottiene il numero proposto 3249.

Sia ancora da estrarre la radice del numero 390625. Ecco l'oporazione:

39,06,25	
36	625
30,6	122
244	2
622,5	1245
622 5	5
0	

Diviso il numero in tre membri binari, ossia di due cifre l'uno, come si vede, trovo che il massimo quadrato contenuto nel primo membro 39 è 36, la cui radice 6 è la prima cifra della radice cercata. Sottraggo dal 39 il quadrato 36 della radice trovata, a destra del resto 3 abbasso il secondo membro 06, e ottengo 306; separo con una virgola l'ultima cifra 6, e divido la parte 30, a sinistra, pel doppio 12 della radice trovata. Scrivo il quoziente 2, che si ottiene, a destra del numero 12. Il numero 122 risultante si moltiplica per lo stesso 2; il prodotto 244 potendosi sottrarre dal numero 306, scrivo il 2 trovato per seconda cifra della radice, di cui conosceremo già le due cifre 6 e 2, ossia la parte 62. Ciò fatto sottraggo il 244 dal 306, e a destra del resto 62 scrivo l'ultimo membro 25 del numero proposto. Nel numero risultante 6225 separo l' ultima cifra con una virgola; divido la sua prima parte 622 pel doppio 124 della radice già trovata. Il quoziente 5 si scrive a destra dello stesso 124; si moltiplica per 5 il numero risultante 1245. Il prodotto sottratto dal numero 6225, che si aveva, dà un resto zero; dunque l'o-

perazione è finita, ed il 5 è l'ultima cifra della radice cercata, la quale per conseguenza è 625.

Se il numero proposto avesse ancora avuti altri membri binari, si sarebbero questi successivamente abbassati come i precedenti; si sarebbe sui medesimi operato allo stesso modo di sopra, e ad ogni membro del numero proposto si ottiene sempre una cifra al quoziente, e non più di una cifra per membro. Quindi nelle divisioni che si fanno per trovare le cifre successive della radiee non si debbono mai ammettere quozienti maggiori di nove.

Allorquando nel corso dell'operazione, a destra di un resto si abbassa il membro corrispondente del numero proposto, ed il numero risultante, privato dell'ultima cifra e diviso pel doppio della radice trovata, dà un quoziente *zero* o minore di ***uno***, si scrive la cifra *zero* nella radice e si abbassa tosto il membro seguente del numero dato, continuando ad operare come sopra.

231. La ragione della regola esposta si deduce dal principio sopra stabilito (224) che dice che il quadrato di un numero che consti di decine e di unità si compone del quadrato delle decine, più il doppio prodotto delle decine per le unità, più ancora il quadrato delle unità. Ed in vero sia proposto di estrarre la radice dal numero 676.

L'operazione, secondo la regola esposta, si farebbe come si vede qui sotto, e si troverebbe 26 per la radice.

6,76	26
4	46
27,6	6
27 6	
0	

Digitized by Google

Infatti il numero proposto essendo maggiore di 100, la cui radice è 10, la sua radice avrà per lo meno due cifre, e si comporrà necessariamente di decine e di unità. Si chiami d il numero delle decine, ed u quello delle unità della radice cercata; questa sarà $10d+u$, poichè ogni decina vale 10 unità; ed il suo quadrato dovendo essere eguale al numero proposto 676, si avrà

$$(10d+u)^2=100d^2+2\times10du+u^2=676.$$

Ora il numero 676 contiene *sei* centinaia; onde il trinomio che gli è equivalente deve pur contenerne sei, e non di più. Ma il primo termine $100d^2$ del trinomio contiene d^2 centinaia; per la qual cosa non potrà d^2 essere maggiore di *sei*. Si avrà adunque $d^2=6$, ovvero $d^2<6$. Ma d^2 è un quadrato perfetto, dunque esso non può valere altro che uno de'quadrati perfetti contenuti in 6; esso varrà pertanto 1, o 4, che sono i soli quadrati contenuti in 6. Dico che esso deve valere il massimo di questi quadrati, ossia 4, cosicchè d, che è la radice quadrata di d^2, varrà 2, che è la radice quadrata di 4. Infatti il numero proposto 676 essendo maggiore di 400, che è il quadrato di 20, ossia di 2 decine, la radice cercata varrà più di due decine. Ma le decine della radice non possono essere più che due per ciò che si è già detto; dunque sarà $d=2$. Ecco così determinato il valore delle decine della radice cercata.

Si vede in tale maniera che le decine della radice quadrata di un numero sono date dalla radice quadrata del massimo quadrato contenuto nelle centinaia del numero proposto, il che è d'accordo colla regola sopra stabilita per l'estrazione della radice quadrata.

Restano a trovare le unità. Per questo sottraggo il quadrato 4 del numero delle decine della radice dalla prima parte 6 del numero dato, il quale diventa così 276, e levo anche la parte $100d^2$, equivalente a quattro centinaia, dal trinomio $100d^2+2\times10du+u^2$, e mi rimane l'eguaglianza

$$2\times10du+u^2=276$$

dalla quale dobbiamo ricavare il valore di u. Perciò osservo che il secondo membro di questa uguaglianza, ossia il numero che sta dopo il segno $=$, contiene 27 decine, ed altrettante per conseguenza ne deve contenere il primo membro. Ora la parte $2\times10du$ del primo membro essendo $2du$ volte 10, contiene $2du$ decine; onde non potrà essere $2du$ maggiore di 27. Avremo pertanto $2du=27$, ovvero $2du<27$.

Supponiamo $2du=27$; allora dividendo per $2d$ le due quantità eguali $2du$ e 27, i quozienti u e $\frac{27}{2d}$ saranno eguali e si avrà $u=\frac{27}{2d}$; il che fa vedere che le unità si troveranno dividendo la prima parte 27 del numero 276 per $2d$, ossia pel doppio della radice 2 già trovata. Questa cosa conferma la regola sopra esposta. Il valore di $2du$ potendo anche essere inferiore a 27, ne risulta che il valore trovato per u potrebbe essere troppo grande. Per sottoporlo a prova, si cercherà se il medesimo soddisfaccia all'eguaglianza

$$2\times10du+u^2=276.$$

Ma la quantità $2\times10du+u^2$ equivale al prodotto di u per $2\times10d+u$; infatti eseguendo la moltipli-

cazione di queste due quantità, si trova per prodotto $2\times10du+u^2$. Ora il fattore $2\times10d+u$ vale il doppio della cifra trovata alla radice moltiplicata per 10, più il valore di u che si vuol verificare. Nel nostro caso la cifra trovata alla radice è 2; moltiplicata per 10, essa dà due decine; il doppio è 4 decine, ossia 40; il valore di u è $\frac{27}{2d}=\frac{27}{4}=6$ in intieri. Dunque $2\times10d+u$ vale $40+6=46$. Questo numero si ottiene scrivendo il valore 6 di u a destra del doppio della radice trovata. Moltiplicando adunque 46 per 6, se il prodotto sarà eguale a 276 o minore di questo numero, il valore trovato di u sarà buono e si scriverà nella radice a destra della cifra 2. Ove il prodotto nominato non si potesse sottrarre, bisognerebbe diminuire di un' unità la cifra trovata, e provare di nuovo come sopra si è detto.

232. Nel caso in cui il numero proposto abbia più di quattro cifre, separate colla virgola le due cifre a destra di esso, le cifre a sinistra della virgola saranno in numero maggiore di due, e per conseguenza le decine della radice non verranno espresse da una sola cifra. Sempre però le decine si determineranno dalla radice del massimo quadrato perfetto contenuto nella parte del numero dato che è a sinistra della virgola. Onde saremo condotti a cercare la radice di questa prima parte del numero dato. Opereremo pertanto su di essa come sul numero dell'esempio precedente, separando le due ultime cifre a destra con una virgola, e ne ricaveremo la regola sopra esposta per l'estrazione della radice quadrata di qualunque numero. Ecco un nuovo esempio:

10,27,20,25	3205
9	62
12,7	2
124	6405
3202,5	5
32025	
0	

In quest'esempio, dopo di avere abbassato il terzo membro 20 del numero proposto a destra del resto 3, il numero 32 non contenendo il doppio 64 della radice trovata, si scrive 0 alla radice, e si abbassa l'ultimo membro 25, continuando l'operazione come al solito.

Si noti che ogni membro in cui viene scomposto il numero dato somministra una cifra alla radice, la quale avrà per conseguenza un numero di cifre eguale alla metà del numero delle cifre del numero dato, se queste sono in numero pari, od eguale alla metà dello stesso numero accresciuto di un'unità, se sono in numero impari.

233. Allorquando il numero dato non è quadrato perfetto, dopo di avere abbassato tutti i suoi membri binari e trovato alla radice tante cifre, quanti sono questi membri, rimarrà un resto, e la radice trovata sarà esatta negli intieri. In questo caso la radice cercata è compresa tra il numero che si sarà trovato e lo stesso numero accresciuto di un'unità.

Per verificare se l'estrazione della radice è stata ben fatta, si faccia il quadrato della radice trovata, e ad esso si aggiunga il resto dell'operazione, se vi ha: il risultato dev'essere eguale al numero dato.

Allorquando il resto dell'operazione è maggiore del doppio della radice trovata, l'operazione non è

fatta a dovere. Risulta ciò dal 6° teorema del numero 226.

234. Per estrarre la radice quadrata da una frazione ordinaria, conviene estrarre la radice dal numeratore e dal denominatore separatamente. Infatti per fare il quadrato di una frazione si fa il quadrato dei suoi due termini. Onde si avrà ad esempio:

$$\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3}; \quad \sqrt{\frac{25}{36}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}}=\frac{5}{6}.$$

235. Da questo principio si deduce la regola per estrarre per approssimazione la radice de' numeri intieri che non sono quadrati perfetti. Si abbia il numero 23, da cui si voglia estrarre la radice quadrata. È chiaro che questa sarà maggiore di 4 e minore di 5; per ottenerla con approssimazione nei decimi, si moltiplichi per 100 (che è un quadrato perfetto) il numero 23, e si divida successivamente il prodotto per 100, il che non altera il numero dato. Si avrà $23=\frac{23\times100}{100}=\frac{2300}{100}$;

e quindi $\sqrt{23}=\sqrt{\frac{2300}{100}}=\frac{\sqrt{2300}}{\sqrt{100}}=\frac{\sqrt{2300}}{10}$.

Estraendo pertanto la radice del numero 2300, la quale è in intieri 47 (con 91 di resto), e dividendola per 10, si avrà $\sqrt{23}=4{\cdot}7$ esatta ne' decimi. Infatti la radice di 2300 è compresa tra 47 e 48, dunque la radice di 23 è compresa tra 4·7 e 4·8. Se si fosse moltiplicato il numero 23 pel quadrato di 100 che è 10000, si sarebbe ottenuto allo stesso modo

$$\sqrt{23}=\sqrt{\frac{230000}{10000}}=\frac{\sqrt{230000}}{100}=\frac{479}{100}=4{\cdot}79,$$

radice esatta ne' centesimi.

236. Per poco che si rifletta sull'esempio fatto, si vede che il metodo della ricerca delle radici per approssimazione in decimali si riduce ad aggiungere a destra del numero proposto tanti membri binari di zeri quante cifre decimali esatte si vogliono ottenere nella radice; estrarre la radice del numero così alterato, esatta negli intieri, e separare in questa verso destra con un punto tante cifre, quanti membri binari di zeri si sono aggiunti al numero dato.

Si voglia la radice di 2 con tre cifre decimali esatte; si estrarrà la radice del numero 2000000 come segue:

2,00,00,00	1414
1	24
10,0	4
96	281
40,0	1
281	2824
1190,0	4
11296	
604	

Si trova in questo modo per radice 1414, e separando la tre cifre a destra, si avrà $\sqrt{2}=1{\cdot}414$, esatta nei millesimi.

237. Quindi si ricava anche il metodo per estrarre con approssimazione la radice delle frazioni ordinarie e delle frazioni decimali. Cominciamo da queste ultime. Data una frazione decimale, si riduca la medesima (se non lo ha) ad avere un numero pari di cifre a destra del punto coll' aggiunta di uno zero. Dopo, partendo dal punto, e andando verso destra e verso sinistra, si divida con virgole il nu-

mero dato in membri binari, ossia di due cifre l'uno. L'ultimo membro a destra sarà sempre di due cifre; l'ultimo a sinistra potrà essere anche di una. Si estragga dal numero così preparato, come se fosse intiero, la radice esatta negli intieri, e a destra di questa si separino tante cifre con un punto quanti membri binari di cifre si avevano nella parte frazionaria del numero proposto.

Esempio. Sia da estrarre la radice del numero frazionario 3'14159. Aggiungo a destra di esso uno zero per rendere pari il numero delle cifre frazionarie, divido poscia il numero in membri binari, come si è detto, ed opero come si vede qui sotto:

3'14,15,90	1772
1	27
21,4	7
189	347
251,5	7
2429	3542
869,0	2
7084	
1606	

A destra della radice trovata 1772 separo tre cifre con un punto, tanti precisamente essendo i membri binari a destra del punto del numero proposto, ed ottengo $\sqrt{3'14159}=1'772$ esatta ne' millesimi. Se si fosse voluta maggiore approssimazione, sarebbe stato necessario aggiungere a destra del dato numero tanti membri binari di zeri, quante nuove cifre decimali si sarebbero desiderate nella radice.

La ragione di questa cosa sta in ciò che il numero dato avendo un numero pari di cifre dietro il

Digitized by Google

punto, il suo denominatore sottinteso è sempre un quadrato perfetto, la radice del quale è l'unità seguita da tanti zeri, quante sono le coppie di cifre a destra del punto del numero dato. Ora, per la regola data nell'estrazione della radice quadrata delle frazioni ordinarie, conviene dividere la radice del numeratore per quella del denominatore; dunque ne risulterà la regola esposta per le frazioni decimali.

238. Sia ora da estrarre per approssimazione la radice quadrata da una frazione ordinaria, i cui termini non siano quadrati perfetti. Si potrà ridurre la frazione ordinaria in decimale equivalente, e poi estrarre la radice come sopra. Così, se si volesse la radice di $\frac{2}{3}$, osservando che questa frazione, in decimali, vale ˙6666, si otterrà, colla regola sopra esposta, $\sqrt{\frac{2}{3}}=˙81$ coll'esattezza nei centesimi.

Altrimenti si potrebbe anche estrarre con approssimazione la radice dei due termini della frazione, e dividere l'una per l'altra le due radici trovate. Ma per non avere da estrarre due radici, sarà meglio trasformare la frazione data in altra equivalente avente per denominatore un quadrato perfetto, il che si ottiene moltiplicando i due termini della frazione pel denominatore di essa. Così si avrà

$$\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{6}{9}}=\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{2˙44}{3}=˙81\,;$$

$$\sqrt{\frac{4}{5}}=\sqrt{\frac{20}{25}}=\frac{\sqrt{20}}{5},\ \text{ecc.}$$

Invece di ridurre il denominatore della frazione ad essere un quadrato perfetto, avremmo potuto ridurre ad essere tale il numeratore, moltiplicando ambi i termini della frazione data pel numeratore di essa.

Si sarebbe in tale modo trovato, ad esempio·

$$\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{4}{6}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{6}}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{2}{2{\cdot}44}.$$

Ma è più comoda nelle applicazioni la riduzione del denominatore a quadrato perfetto.

Allorchè la frazione ordinaria si riduce in decimale per estrarne poscia la radice quadrata, bisogna spingere la ricerca delle cifre della frazione decimale equivalente alla data fino a che si abbia in essa dopo il punto un numero di cifre doppio di quello che si desidera esatto nella radice; e l'esattezza di questa sarà ottenuta *a meno* di una sua unità dell'ordine infimo. Al contrario allorquando si riduce la frazione data ad avere il denominatore quadrato per estrarre poscia la radice dal numeratore, il grado di approssimazione che si avrà nel risultato finale, o, per meglio dire, l' errore di questo sarà eguale al quoziente dell'errore della radice del numeratore diviso per la radice del denominatore quadrato.

NB. Per ridurre il denominatore di una frazione ad essere quadrato perfetto, allorchè esso contiene già alcuni fattori quadrati, basta moltiplicare i due termini della frazione per gli altri fattori non quadrati. Così la frazione $\frac{7}{12}$ si riduce a denominatore quadrato moltiplicando i suoi due termini per 3, essendo $12=3\times4$, e si ottiene $\frac{21}{36}$.

239. In generale per trovare la radice di un numero qualunque non quadrato perfetto, a meno di una frazione data, cioè in modo che l'errore commesso sia minore della frazione data, che supporremo avere per numeratore l' unità, e per denominatore un numero qualunque, si moltiplica il numero dato pel quadrato del denominatore della frazione data,

si estrae dal prodotto la radice esatta negli intieri, e si divide questa radice pel denominatore stesso della frazione. Invero si voglia, ad esempio, la radice di 2 a meno di $\frac{1}{12}$. Osservo che è

$$2=\frac{2\times12^2}{12^2}, \text{ e quindi } \sqrt{2}=\frac{\sqrt{2\times12^2}}{\sqrt{12^2}}=\frac{\sqrt{2\times12^2}}{12}.$$

Ora $2\times12^2=288$, e la radice di 288 è compresa tra 16 e 17; onde la radice di 2 sarà compresa tra $\frac{16}{12}$ e $\frac{17}{12}$; perciò sì l'una che l'altra di queste due frazioni rappresenta la radice di 2 a meno di un dodicesimo.

240. Come il quadrato del prodotto di più fattori (225) vale il prodotto dei quadrati de' singoli fattori, così la radice quadrata del prodotto di più fattori vale il prodotto delle radici quadrate de' singoli fattori, cosicchè sarà $\sqrt{a^2b^2c^2}=\sqrt{a^2}\times\sqrt{b^2}\times\sqrt{c^2}=abc$. Di qui si deduce una regola semplicissima, per portar fuori di un radicale quadrato un fattore quadrato che gli sta sotto. In vero sarà $\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\times\sqrt{b}=a\times\sqrt{b}$. Dunque un fattore quadrato, che sta sotto ad un radicale, si può portare fuori di esso estraendone la radice quadrata. Così sarà $\sqrt{50}=\sqrt{25\times2}=5\sqrt{2}$; $\sqrt{300}=\sqrt{100\times3}=10\sqrt{3}$. Viceversa, essendo $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$, se ne deduce che un fattore che moltiplica un radicale si può portare dentro al radicale moltiplicando pel suo quadrato la quantità che sta sotto al radicale. Così sarà $2\sqrt{3}=\sqrt{4\times3}=\sqrt{12}$; $5\sqrt{5}=\sqrt{25\times5}=\sqrt{125}$.

§ 2. Del cubo e della radice cubica.

241. *Cubo della somma di due numeri.* Nel numero 216 abbiamo trovato il cubo di $a+b$ eguale

ad $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. Questo risultato ci fa dire che il cubo della somma di due numeri è eguale al cubo del primo numero, più tre volte il quadrato del primo moltiplicato pel secondo, più tre volte il primo moltiplicato pel quadrato del secondo, più il cubo del secondo. Quindi se un numero si decompone in due parti una di decine, l'altra di unità (16), il suo cubo varrà il cubo delle decine, più il triplo quadrato delle decine moltiplicato per le unità, più il triplo prodotto delle decine pel quadrato delle unità, più il cubo delle unità.

242. *Cubo di un prodotto.* Il cubo di un prodotto di due o più fattori è uguale al prodotto del cubo de' singoli fattori. Infatti siano i fattori a, b, c; il cubo del loro prodotto abc (216) si esprime con $(abc)^3=abc\times abc\times abc=a^3b^3c^3$.

243. Il cubo di un numero positivo è positivo, ed il cubo di un numero negativo è negativo. Infatti (216) abbiamo $(+a)^3=(+a)\times(+a)\times(+a)$ $=+a^3$, e $(-a)^3=(-a)\times(-a)\times(-a)=-a^3$.

244. La differenza de' cubi di due numeri consecutivi o differenti l'uno dall'altro di un'unità, è uguale al triplo quadrato del numero minore, più il triplo dello stesso numero, più l'unità. Infatti $(a+1)^3-a^3=3a^2+3a+1$.

245. Il cubo d'un numero frazionario differente da un numero intiero non può essere un numero intiero. Infatti esprimiamo il numero frazionario dato colla frazione $\frac{a}{b}$, nella quale supporremo a e b numeri intieri primi fra di loro; sarà b necessariamente diverso dall'unità. Il cubo di $\frac{a}{b}$ è $\frac{a^3}{b^3}$; ora a^3 non può contenere fattori primi diversi da quelli

di a, nè b^3 diversi da quelli di b; dunque a^3 e b^3 sono primi fra di loro, ed il loro quoziente non può essere mai un numero intiero, essendo b diverso dall'unità.

246. *Radice cubica.* Chiamasi radice cubica di un numero la quantità, che elevata al cubo fa il numero dato. Quindi il cubo della radice cubica di un numero fa il numero stesso. La radice cubica s'indica col segno $\sqrt[3]{}$. Il 3 scritto tra le gambe del radicale $\sqrt{}$ dicesi l'*indice* del radicale. Così il simbolo $\sqrt[3]{64}$ esprime la radice cubica di 64, e vale 4, giacchè 4 al cubo fa 64.

In generale la radice m^{esima} di un numero è la quantità, che, elevata alla potenza indicata da m, fa il numero dato, qualunque siasi il valore numerico di m. La radice m^{esima} s'indica col simbolo $\sqrt[m]{}$, ed m è l'indice del radicale.

247. La radice cubica di un numero negativo è negativa, e la radice cubica di un numero positivo è positiva (243).

248. La radice cubica di un numero intiero che non sia un cubo perfetto non si può esprimere nè con numeri intieri, nè con numeri frazionari aventi termini finiti, e si dice perciò una quantità *irrazionale* o *incommensurabile.* Infatti essa non è un numero intiero, poichè il numero dato non è un cubo perfetto; e se una frazione potesse esprimere una tale radice cubica, il cubo di questa frazione sarebbe eguale ad un numero intiero, il che è contrario al principio del num. 245.

249. *Regola per estrarre la radice cubica dai numeri interi.* Ecco la regola per l'estrazione della ra-

dice cubica applicata ad un esempio. Si vuole estrarre la radice cubica dal numero 12812904. Si divide il numero proposto in membri ternari o di tre cifre l'uno, cominciando da destra e camminando verso sinistra; l'ultimo membro a sinistra potrà avere anche una o due cifre soltanto. Nel caso nostro ne ha due. Dopo si cerca quale è il massimo cubo perfetto contenuto nel primo membro a sinistra. Perciò conviene sapere a mente i cubi dei numeri dall'uno fino al nove, i quali sono per ordine i seguenti: 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729. I numeri nel seguito dell'operazione si dispongono come per l'estrazione della radice quadrata, e come si vede qui sotto:

12,812,904	234
8	12
48	1587
12167	
6459	
12812904	
0	

Pertanto dopo di avere diviso il numero dato in membri ternari, come si vede, trovo che il massimo cubo contenuto nel primo membro 12 a sinistra è 8, la cui radice cubica è 2; scrivo 2 alla radice. Sottraggo il cubo 8 da 12; a destra del resto 4 abbasso la prima cifra 8 del membro seguente e ottengo il numero 48. Faccio il quadrato 4 della cifra 2 trovata alla radice, e lo moltiplico per 3, e ottengo così il triplo quadrato 12 della radice trovata. Divido il numero 48 per questo 12; il quoziente 4 potrà essere la seconda cifra della radice. Non si

scrive però questa cifra a posto senza prima sottoporla a prova, ed ecco come ciò si può e si suole fare: scritta la cifra 4 a destra della trovata 2, si ottiene il numero 24: affinchè il 4 sia buono è d'uopo che il cubo di 24 non sia maggiore del numero 12812 formato dai due primi membri del numero dato. Essendo tale cubo maggiore di questo numero, si prova la cifra 3, facendo il cubo di 23, il quale è 12167. Questo numero potendosi sottrarre da 12812, la cifra 3 è buona e si scrive alla radice. Ora si sottragga il cubo di 23 da 12812, e accanto al resto 645 si abbassi la prima cifra 9 del membro seguente del numero dato, con che si otterrà il numero 6459, il quale si divide pel triplo quadrato 1587 della parte già trovata della radice. Il quoziente che si trova sarà l'ultima cifra della radice cercata, se il cubo del numero che si troverà per questa radice non sarà maggiore del numero dato. Ora dividendo il numero 6459 per 1587, si trova il quoziente 4, il quale scritto a destra della radice 23 già trovata, dà il numero 234; e questo elevato al cubo produce il numero proposto. Dunque la radice cercata è 234. Se il cubo di questo numero fosse stato maggiore del numero dato, sarebbe stato necessario diminuire la cifra 4 di un' unità e poi di nuovo provarla allo stesso modo.

Se il numero dato avesse ancora altri membri ternari oltre l'ultimo 904, si abbasserebbe successivamente, come pe' membri precedenti, la prima cifra di ciascun membro, e ad ogni membro del numero dato si otterrebbe una cifra alla radice. Allorquando dopo di avere abbassato la prima cifra di un membro accanto al resto ottenuto, ne risulta un numero che non contiene il triplo quadrato della

radice trovata, si scrive *zero* alla radice, e si abbassano le cifre seguenti del numero dato fino alla prima del membro che segue, inclusivamente.

250. Ecco ora la dimostrazione di questa regola. Osservo che il cubo di un numero che si componga di decine e di unità (241) deve contenere il cubo delle decine più tre volte il prodotto del quadrato delle decine per le unità, più tre volte il prodotto delle decine pel quadrato delle unità, più il cubo delle unità. Per conseguenza se è dato, ad esempio, il numero 12167 di cui si voglia estrarre la radice cubica, componendosi questa di decine e di unità (giacchè il numero proposto ha più di tre cifre, ed il cubo di 10 è 1000, che è il più piccolo numero di 4 cifre), se chiamo d il numero delle decine ed u quello delle unità della radice cercata, questa sarà espressa da $10d+u$, ed il suo cubo dovrà essere eguale a 12167. Onde sarà

$$1000d^3+3\times100d^2u+3\times10du^2+u^3=12167.$$

Il primo termine $1000d^3$ contiene d^3 migliaia, ed altre migliaia potrebbero ancora essere contenute negli altri tre termini che stanno avanti al segno di eguaglianza; ma il numero 12167, che segue il segno d'eguaglianza, contiene 12 migliaia; dunque anche la parte che sta dinanzi a quel segno deve contenerne altrettante. Per conseguenza il numero d^3 delle migliaia del primo termine $1000d^3$ sarà uguale o minore di 12, non mai maggiore di 12. Sarà dunque $d^3=12$, o $d^3<12$. Ma d^3 è un cubo perfetto; perciò esso sarà eguale ad uno de' cubi perfetti contenuti in 12, i quali sono 1 e 8. Dico che d^3 deve valere il massimo cubo contenuto in 12, ossia che deve valere 8, d'onde si ricava $d=2$. Infatti il cubo di 20 essendo minore del numero dato 12167, la

radice cubica cercata ha per lo meno due decine. Si scorge in tale maniera il motivo per cui si separano verso destra con una virgola tre cifre del numero dato, per cercare in seguito il massimo cubo contenuto nella parte del numero che è a sinistra della virgola.

Trovato così il valore di d che è 2, resta a trovare il valore u. Sottraendo perciò dalla prima parte del numero dato il cubo 8 migliaia della radice trovata, che vale $1000d^3$, il resto 4167 dovrà ancora essere eguale a

$$3\times100d^2u+3\times10du^2+u^3.$$

Il termine $3\times100d^2u$ vale $3d^2u$ moltiplicato per 100, ossia contiene $3d^2u$ centinaia; ma il resto 4167 contiene 41 centinaia; sarà dunque o $3d^2u=41$, o $3d^2u<41$, secondo che gli altri due termini $3\times10du^2+u^3$ faranno insieme meno o più di 100. Dividendo le due quantità $3d^2u$ e 41 ambedue per la stessa quantità $3d^2$, i quozienti rispettivi saranno u e $\frac{41}{3d^2}$, e sarà perciò il numero delle unità della radice $u=\frac{41}{3d^2}$, oppure $u<\frac{41}{3d^2}$. Diviso adunque il numero 41 (che risulta dopo di avere scritto la prima cifra del secondo membro ternario del numero dato a destra del resto del primo membro diminuito del suo massimo cubo) per $3d^2$, il quoziente intero sarà eguale alla seconda cifra della radice, o maggiore di essa, e si verificherà se sarà buono, elevando al cubo la radice trovata. Questo cubo non dovrà essere maggiore del numero dato.

Si scorge così la ragione delle operazioni fatte sull'esempio dell'articolo precedente.

Egli è chiaro che se, dopo di avere separato a destra del numero dato le tre ultime cifre, la parte che resta a sinistra avrà ancora più di tre cifre, per avere le decine della radice converrà estrarre la radice cubica da questa parte del numero dato, e si opererà su di essa come sul numero del caso precedente, separando ancora con una virgola verso destra le tre ultime sue cifre. Lo stesso si farebbe ancora sulla parte che resterà a sinistra di questa virgola, se essa avesse ancora più di tre cifre. Quindi si ricava la regola sopra esposta.

251. Allorquando il numero dato non è cubo perfetto, dopo di aver abbassato tutti i suoi membri ternari, e trovato alla radice tante cifre quanti sono questi membri, rimarrà un resto, e la radice trovata sarà esatta negli interi, o, come si suole anche dire, a meno di un'unità.

In ogni caso per verificare se l'estrazione della radice cubica è stata ben fatta, si faccia il cubo della radice trovata, e ad esso si aggiunga il resto della operazione, se vi ha: il risultato dev'essere eguale al numero dato.

Allorquando il resto dell'operazione è maggiore del triplo quadrato della radice trovata, più il triplo della stessa radice, l'operazione non è fatta a dovere. Risulta ciò dal principio del num. 244.

252. La radice cubica di una frazione ordinaria è uguale alla radice cubica del numeratore divisa per la radice cubica del denominatore; infatti il cubo di una frazione si forma elevando al cubo i suoi due termini. Quindi sarà

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{2}{3}.$$

253. Di qui, come nell' estrazione della radice quadrata, si deduce la regola per estrarre per approssimazione la radice cubica dai numeri che non sono cubi perfetti. Sia infatti il numero 12; osservo che moltiplicando e dividendo a un tempo il 12 per 1000, ad esempio, che è il cubo di 10, si avrà

$$12=\frac{12\times1000}{1000}=\frac{12000}{1000}, \text{ e quindi}$$

$$\sqrt[3]{12}=\sqrt[3]{\frac{12000}{1000}}=\frac{\sqrt[3]{12000}}{10}=\frac{22}{10}=2{\cdot}2.$$

In questo modo si ha la radice cubica di 12 esatta nei decimi; infatti la radice cubica di 12000 è compresa tra 22 e 23, e perciò quella di 12 sarà compresa tra 2·2 e 2·3, onde l'uno e l'altro di questi due valori differisce di meno di un decimo dalla vera radice cercata. Se si volesse la radice stessa esatta nei centesimi, basterebbe moltiplicare e dividere il 12 a un tempo per il cubo di 100 che è 1000000. Operando così, come sopra, si ottiene la radice cubica di 12 esatta con 2 cifre decimali. In generale, come si deduce facilmente dall'esempio arrecato, per ottenere con approssimazione la radice cubica di un numero che non sia un cubo perfetto, si scrivono a destra di esso tanti membri ternari di zeri, quante sono le cifre decimali che si vogliono alla radice; si estrae la radice cubica dal numero risultante, e alla destra della radice trovata si separano tante cifre con un punto, quanti membri ternari di zeri si erano aggiunti al numero dato. In questo modo si troverà, ad esempio, che la radice cubica di 5 esatta ne' deci-millesimi è 1·7099.

254. Per la stessa ragione, se si vorrà estrarre

la radice cubica da una frazione decimale, converrà, partendo dal suo punto e camminando verso destra e verso sinistra, dividerla in tanti membri ternari. L'ultimo membro a sinistra potrà avere anche solo una o due cifre, ma l'ultimo a destra dovrà sempre averne tre; se non le ha, si riduce ad averle coll'aggiunta di uno o due zeri. Ciò fatto, si estrarrà dal numero, come se fosse intiero, la radice cubica esatta negli intieri, e si separeranno verso la destra di questa tante cifre con un punto, quanti membri ternari erano a destra del punto del numero dato.

Ecco la ragione di questa operazione. Riducendo le cifre a destra del punto del numero dato ad essere in numero moltiplo di tre, il denominatore sottinteso sarà sempre un cubo perfetto, anzi sarà precisamente il cubo del numero che è scritto coll'unità seguita a destra da tante cifre zero, quanti sono i membri ternari a destra del punto del numero dato. Quindi estratta la radice cubica dal numero così preparato esatta negli intieri, basterà, per avere la radice cercata, dividerla tante volte per dieci quanti sono i membri ternari suddetti.

255. Per avere la radice cubica di una frazione ordinaria con approssimazione, invece di estrarre la radice stessa d'ambi i termini, sarà più spedito ridurre la frazione ad avere per denominatore un cubo perfetto, il che si ottiene moltiplicando i due termini della frazione pel quadrato del denominatore. Quindi si avrà da estrarre la sola radice cubica del numeratore per approssimazione. Così sarà

$$\sqrt[3]{\frac{3}{2}}=\sqrt[3]{\frac{3\times4}{8}}=\frac{\sqrt[3]{12}}{2}=\frac{2{\cdot}2}{2}=1{\cdot}1\,,$$

esatta ne' decimi.

Si potrebbe anche ridurre il numeratore ad essere un cubo perfetto, moltiplicando ambi i termini pel quadrato del numeratore, e operando come si vede nell'esempio seguente.

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\frac{8}{12}}=\frac{2}{\sqrt[3]{12}}=\frac{2}{2\cdot 2}.$$

Nelle applicazioni è meglio ridurre a cubo perfetto il denominatore.

NB. Per ridurre il denominatore di una frazione a cubo perfetto non è sempre necessario di moltiplicare i due termini pel quadrato di esso. In vero allorchè alcuno de'suoi fattori è già un cubo, basta moltiplicare i due termini pel quadrato degli altri fattori; anzi se alcuno di questi altri fattori è un quadrato basterà moltiplicare i termini della frazione pel quadrato dei fattori che non sono nè cubi nè quadrati, e per la radice quadrata de'fattori quadrati. Così il numero 360, che vale $8\times9\times5$, si riduce a cubo perfetto moltiplicandolo per 3 e per 25.

In altro modo si ottiene pure la radice cubica di una frazione ordinaria, riducendola cioè in frazione decimale equivalente, ed estraendo poscia da questa la radice cubica, come si è detto sopra.

256. In generale per trovare la radice cubica di un numero qualunque, non cubo perfetto, a meno d'una frazione data, cioè in modo che l'errore commesso sia minore della frazione data, che supporremo avere per numeratore l'unità, e per denominatore un numero qualunque, si moltiplica il numero dato pel cubo del denominatore della frazione data, si estrae dal prodotto la radice cubica esatta negli intieri, e si divide questa radice pel denomi-

natore stesso della frazione. In vero si voglia, ad esempio, la radice cubica di 2 esatta a meno di $\frac{1}{12}$.

Osservo che è $$2=\frac{2\times12^3}{12^3}$$

e quindi $$\sqrt[3]{2}=\frac{\sqrt[3]{2\times12^3}}{\sqrt[3]{12^3}}=\frac{\sqrt[3]{2\times12^3}}{12}.$$

Ora $2\times12^3=3456$, e la radice cubica di 3456 è compresa tra 15 e 16; onde la radice cubica di 2 sarà compresa tra $\frac{15}{12}$ e $\frac{16}{12}$, perciò sì l'una che l'altra di queste due frazioni rappresenta la radice cubica di 2 a meno di un dodicesimo.

CAPO XI.

DELLE RAGIONI E PROPORZIONI.

257. *Ragione aritmetica.* Dicesi ragione aritmetica o rapporto aritmetico di due quantità la differenza delle medesime.

E dunque data la ragione aritmetica di due quantità dal resto che si ottiene sottraendo l'una dall'altra. Così la ragione aritmetica di a al b sarà $a-b$. Si usa più comunemente scrivere la ragione aritmetica ponendo un semplice punto tra le due quantità così: $a.b$; la prima quantità dicesi *antecedente*, l'al-

tra *conseguente:* tutte e due insieme diconsi *termini* della ragione.

È chiaro che aggiungendo o togliendo una medesima quantità ai due termini, il valore della ragione non cambia.

258. *Ragione geometrica.* Dicesi ragione geometrica o rapporto geometrico, o anche semplicemente ragione o rapporto di due quantità il quoziente che nasce dalla divisione della prima per la seconda. Quindi il rapporto di a al b si può esprimere colla frazione $\frac{a}{b}$, o con $a \div b$. Più comunemente si scrive $a:b$, frapponendo due punti ai *termini* della ragione. Il primo termine dicesi *antecedente*, l'altro *conseguente*.

Siccome i termini della ragione geometrica si possono riguardare quali termini di una frazione, ne segue che moltiplicandoli o dividendoli ambidue per un medesimo numero, il valore della ragione non cambia.

259. *Equidifferenza.* Dicesi equidifferenza od anche *proporzione aritmetica*, l'eguaglianza di due ragioni aritmetiche. Così la ragione aritmetica di 8 a 5 essendo 3, come la ragione di 17 a 14, ne segue che le due ragioni 8 . 5 e 17 . 14 (il punto frapposto ai due numeri di ciascuna ragione si legge *a*, oppure *sta a*) formano un'equidifferenza, la quale si potrebbe scrivere così

$$8-5=17-14,$$

ma si usa scrivere

$$8 . 5 : 17 . 14$$

frapponendo fra l'una e l'altra ragione due punti, i quali si leggono *come*, e si dice: otto a cinque

Digitized by Google

come diciassette a quattordici. Egualmente l'equidifferenza $a \,.\, b : c \,.\, d$ si legge: a sta a b come c a d, e significa

$$a-b=c-d.$$

260. *Proprietà dell'equidifferenza.* In ogni equidifferenza la somma de' termini estremi è eguale alla somma dei termini medii.

Infatti sia l'equidifferenza

$$a \,.\, b : c \,.\, d.$$

Scrivendola sotto forma d'eguaglianza

$$a-b=c-d$$

e trasportando (219) i termini negativi da un membro all'altro, si ottiene

$$a+d=c+b,$$

che è ciò che si voleva dimostrare.

Viceversa, se tra quattro quantità a, b, c, d esiste la relazione

$$a+d=c+b,$$

avrà luogo tra di esse l'equidifferenza

$$a \,.\, b : c \,.\, d;$$

infatti trasportando, nell'eguaglianza stabilita, i termini d e b dal membro, in cui si trovano, nell'altro (219), si ottiene

$$a-b=c-d,$$

ossia $\quad a \,.\, b : c \,.\, d.$

261. Se i due termini di mezzo dell'equidifferenza sono eguali, l'equidifferenza dicesi *continua*. Tale sarebbe la seguente:

$$18 \,.\, 13 : 13 \,.\, 8,$$

e si scrive così: $\div 18 \,.\, 13 \,.\, 8,$

e si legge: equidifferenza continua del 18 al 13 all'8.

Nel caso dell'equidifferenza continua la proprietà che dice che la somma dei *medii* è eguale alla somma degli *estremi*, si esprime così: il doppio del termine

medio è eguale alla somma degli estremi. Il termine medio dicesi la *media aritmetica* tra le due quantità che formano i termini estremi.

262. Dati tre termini dell'equidifferenza, od anche due soli, se l'equidifferenza è continua, si può trovare il termine mancante colla regola seguente:

Se il termine mancante o incognito è uno dei medii, si trova sottraendo il medio noto dalla somma degli estremi; se è un estremo, si trova sottraendo l'estremo noto dalla somma dei medii.

Nella equidifferenza continua si trova un estremo sottraendo l'altro estremo dal doppio del medio. Se il termine incognito è il medio, si trova dividendo per due la somma degli estremi.

263. Dunque la media aritmetica tra due quantità vale la semi-somma di queste. In generale la media aritmetica di più quantità si trova dividendo la somma di tutte queste per il numero delle medesime.

264. Le regole date per trovare un termine mancante in una equidifferenza si deducono immediatamente dalla proprietà sopra dimostrata; infatti per l'equidifferenza

$$a\,.\,b : c\,.\,d,$$

avendosi $a+d=b+c$,

si ricava tosto $a=b+c-d$,

$$b=a+d-c,$$

il che costituisce appunto le regole esposte.

265. *Pròporzione.* Dicesi proporzione l'eguaglianza di due ragioni geometriche. Così le ragioni di 12 al 3 e di 20 al 5, le quali sono eguali perchè si ha $\frac{12}{3}=\frac{20}{5}$, ossia $12 \div 3 = 20 \div 5$, formano una proporzione; e questa, invece di scriversi sotto forma

d'eguaglianza come sopra, si suole scrivere in questo altro modo:

$$12 : 3 : : 20 : 5,$$

frapponendo fra le due ragioni quattro punti, e si legge 12 al 3 *come* 20 al 5. Alcuni al posto dei quattro punti : : usano scrivere il segno $=$. Parimente se si avesse l' uguaglianza $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, ne risulterebbe la proporzione

$$a : b : : c : d.$$

Il primo e il terzo termine di una proporzione diconsi *antecedenti*, il secondo e il quarto *conseguenti*; il primo e l'ultimo *estremi*, il secondo e il terzo *medii*.

Se i medii sono eguali, la proporzione è *continua*. Tale sarebbe la seguente:

$$18 : 6 : : 6 : 2$$

Essa scrivesi così:

$$\div\div 18 : 6 : 2,$$

e si legge: proporzione continua di 18, al 6, al 2.

266. Segue dalla definizione della ragione e proporzione geometrica che la proporzionalità de'quattro termini di una proporzione non viene distrutta moltiplicando o dividendo per un medesimo numero: 1° tutti i termini della proporzione; 2° i due primi soltanto; 3° i due ultimi; 4° gli antecedenti; 5° i conseguenti. Infatti nei tre primi casi non si cambia il valore dei rapporti della proporzione; e nei due ultimi l'operazione indicata torna allo stesso che moltiplicare o dividere per un medesimo numero i numeratori, ovvero i denominatori di due frazioni eguali.

267. ***Proprietà fondamentale delle proporzioni.*** **In ogni proporzione il prodotto degli estremi è uguale**

al prodotto dei medii; e nella proporzione continua il quadrato del medio vale il prodotto degli estremi. Infatti sia la proporzione $a : b :: c : d$; scritta la medesima sotto forma di eguaglianza,

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

e fatti scomparire i denominatori (219), si ottiene $ad=bc$, che è ciò che si voleva dimostrare. Se la proporzione è continua come la seguente

$$\div\!\div\; m : n : p,$$

si avrà $\frac{m}{n}=\frac{n}{p}$, e facendo scomparire i denominatori, si ottiene $n^2=mp$.

268. Dalla proprietà dimostrata si ricava la regola per trovare un termine mancante in una proporzione. Infatti dall'eguaglianza sopra trovata $ad=bc$ relativa alla proporzione $a : b :: c : d$, si ricava

$$a=\frac{bc}{d}, \text{ ovvero } b=\frac{ad}{c}.$$

Quindi per trovare un termine mancante in una proporzione, se questo è uno degli estremi, si divide il prodotto dei medii per l'estremo noto; e se è uno dei medii, si divide il prodotto degli estremi per il medio noto. Per la proporzione continua poi

$$\div\!\div\; m : n : p,$$

dalla eguaglianza $n^2=mp$, si ricava

$$m=\frac{n^2}{p}, \text{ ovvero } n=\sqrt{mp}.$$

Quindi per avere un termine mancante in una proporzione continua, se il termine incognito è uno degli estremi, si divide il quadrato del medio per l'estremo noto: se poi è il medio l'incognito, si estrae la radice quadrata dal prodotto degli estremi.

269. *Esempi*. Chiameremo x il termine mancante Sia da trovare il valore di x nella seguente proporzione:

$$18 : 3 : : 24 : x;$$

si avrà $x=\frac{3\times24}{18}=4.$

Sia ancora $25 : x : : 35 : 7;$

si avrà $x=\frac{7\times25}{35}=5.$

Sia pure la proporzione continua

$$\div\!\div\ 18 : x : 2;$$

essa darà $x^2=2\times18=36,$
e quindi $x=\sqrt{36}=6.$
Sia finalmente

$$\div\!\div\ x : 8 : 16;$$

si avrà $x=\frac{8^2}{16}=\frac{64}{16}=4.$

270. Se quattro quantità, scritte come i termini d'una proporzione, sono tali che il prodotto delle due di mezzo sia eguale al prodotto delle due estreme, esse nel loro ordine di scrittura costituiscono una proporzione, cosicchè se si avesse $ad=bc$, si otterrebbe tosto la proporzione

$$a : b : : c : d.$$

Infatti dall'eguaglianza $ad=bc$ si deduce, dividendo ambi i membri per bd, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, ossia

$$a : b : : c : d,$$

il che era da dimostrare.

271. Quindi in una proporzione *alternando* i medii tra di loro, o gli estremi tra di loro, ed *invertendo*, ossia scambiando i medii cogli estremi, non si distrugge la proporzionalità dei termini, poichè

si avrà sempre il prodotto dei medii eguale a quello degli estremi. Per conseguenza alternando ed invertendo i termini di una proporzione, essa può scriversi in otto maniere differenti, come segue:

$$a:b::c:d, \qquad b:a::d:c,$$
$$a:c::b:d, \qquad b:d::a:c,$$
$$d:b::c:a, \qquad c:a::d:b,$$
$$d:c::b:a, \qquad c:d::a:b,$$

272. Due proporzioni si possono moltiplicare tra di loro termine a termine, e ciò che ne risulta è ancora una proporzione, che dicesi *proporzione composta* delle due date.

Infatti siano le due proporzioni

$$a : b : : c : d$$

e $$m : n : : p : q,$$

dico che ne risulterà la proporzione

$$am : bn : : cp : dq.$$

Ed invero il prodotto degli estremi $amdq$ è eguale al prodotto dei medii $bncp$, giacchè per le due proporzioni date si ha $ad=bc$, e $mq=np$, le quali due eguaglianze moltiplicate tra di loro dànno $admq=bcnp$.

Per la stessa ragione si possono moltiplicare tra di loro termine a termine un numero qualsivoglia di proporzioni, e ne risulterà sempre una proporzione composta delle date.

Inversamente se due proporzioni si dividono l'una per l'altra termine a termine, ciò che ne risulta formerà ancora una proporzione.

Deducesi come corollario che i termini di una proporzione si possono elevare tutti al quadrato, al cubo, e in generale ad una medesima potenza, senza distrurre la loro proporzionalità. Infatti scrivendo

due o più volte di seguito una medesima proporzione, se si moltiplichino termine a termine le proporzioni risultanti, la proporzione che si compone in tal modo avrà per termini le potenze simili dei termini della proporzione primitiva. Cosicchè se si avesse la proporzione $a : b :: c : d$, si ricaverebbe, elevando tutti i termini alla potenza qualunque m^{ma},

$$a^m : b^m :: c^m : d^m.$$

Quindi si deduce ancora, che si può dai termini di una proporzione estrarre una radice di grado qualunque senza distrurre la proporzionalità dei termini, ossia senza distrurre l'eguaglianza de' due rapporti, cosicchè dalla proporzione $a : b :: c : d$ si può ricavare quest'altra

$$\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} :: \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d},$$

qualunque sia m.

273. Queste due ultime proprietà si possono anche dimostrare come segue. Dalla proporzione $a : b :: c : d$ si ricava $ad = bc$. Elevando ambi i membri di questa eguaglianza alla potenza m^{ma}, si ha $a^m d^m = b^m c^m$; dunque (270)

$$a^m : b^m :: c^m : d^m,$$

il che era da dimostrare.

Egualmente estraendo da ambi i membri dell'eguaglianza $ad = bc$ la radice m^{ma}, si ha $\sqrt[m]{ad} = \sqrt[m]{bc}$, ossia (240)

$$\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{d} = \sqrt[m]{b} \times \sqrt[m]{c};$$

dunque $$\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} :: \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d},$$

il che era da dimostrare.

274. La ragione di una proporzione composta si forma dal prodotto delle ragioni semplici delle proporzioni componenti, e dicesi *ragione composta* delle medesime. Infatti la ragione $\frac{am}{bn}$ della proporzione composta ottenuta nel numero 272 si ottiene moltiplicando tra di loro le ragioni semplici $\frac{a}{b}$ e $\frac{m}{n}$ delle proporzioni componenti.

275. Data una proporzione qualunque

$$a : b :: c : d,$$

componendo si può ottenere

$$a + b : a :: c + d \cdot c,$$

ovvero ancora

$$a + b : b :: c + d : d;$$

infatti queste due proporzioni saranno giuste, per ciò che si è sopra dimostrato (270), se in esse il prodotto dei medii sarà eguale al prodotto degli estremi. Ora nella prima il prodotto dei medii è $ac + ad$, e quello degli estremi $ac + bc$, dovrà dunque essere

$$ac + ad = ac + bc;$$

ossia, togliendo la parte comune ac da ambi i membri, dovrà essere $ad = bc$, il che ha luogo perchè ad non è altro che il prodotto degli estremi della proporzione data, e bc quello de' medii. Nella seconda poi dovrà essere per la stessa ragione

$$ad + bd = bc + bd,$$

ossia, togliendo la parte comune bd, dovrà essere $ad = bc$, il che ha luogo come sopra.

Dunque in ogni proporzione la somma de' due primi termini sta al primo od al secondo, come la somma dei due ultimi sta al terzo od al quarto.

276. *Corollario*. Alternando i medii delle due proporzioni ottenute *componendo*, si avrà

$$a+b : c+d :: a : c$$

e $$a+b : c+d :: b : d.$$

277. Data una proporzione

$$a : b :: c : d,$$

dividendo si può ottenere

$$a-b : a :: c-d : c,$$

ovvero anche

$$a-b : b :: c-d : d.$$

Infatti in queste due proporzioni il prodotto dei medii è eguale a quello degli estremi, il che si dimostra identicamente come nel numero 275.

278. *Corollario*. Alternando i medii nelle due ultime proporzioni ottenute *dividendo*, si ha

$$a-b : c-d :: a : c,$$

e $$a-b : c-d :: b : d.$$

279. *Altro corollario*. Paragonando le due prime proporzioni ottenute ne' corollari precedenti (276 e 278), le quali hanno tutte e due per ultima ragione $a : c$, si deduce che le prime ragioni sono eguali fra di loro perchè eguali ad una terza, e si ottiene la proporzione

$$a+b : c+d :: a-b : c-d,$$

ossia in ogni proporzione la somma de' due primi termini sta alla somma de' due ultimi, come la differenza dei primi sta alla differenza degli ultimi.

Alternando i medii in quest' ultima proporzione, si ottiene anche

$$a+b : a-b :: c+d : c-d,$$

Tutte queste proporzioni, ottenute come corollario dalle date dimostrazioni, si possono dimostrare di-

rettamente, facendo vedere che in esse il prodotto degli estremi vale quello de' medii.

280. In ogni proporzione la somma o la differenza degli antecedenti sta alla somma od alla differenza dei conseguenti, come ciascuno antecedente sta al suo conseguente, cosicchè se esiste la proporzione

$$a : b : : c : d,$$

si deduce quest'altra

$$a \pm c : b \pm d : : a : b.$$

Infatti in questa il prodotto dei medii, che è $ab \pm ad$, è uguale al prodotto degli estremi, che è $ab \pm bc$; poichè tolta la parte comune ab, resta da verificarsi l'eguaglianza $ad = bc$, la quale ha luogo a cagione della proporzione data.

281. In una serie di ragioni eguali come

$$a : b : : c : d : : e : f : : g : h$$

la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti, come ciascun antecedente sta al suo conseguente, cosicchè si avrà

$$a + c + e + g : b + d + f + h : : a : b;$$

infatti questa proporzione sarà esatta, se in essa il prodotto dei medii sarà eguale a quello degli estremi, cioè se si avrà

$$ab + bc + be + bg = ab + ad + af + ah.$$

Tolta la parte comune ab, quest'eguaglianza si riduce a

$$bc + be + bg = ad + af + ah.$$

Ora i tre termini del primo membro sono rispettivamente eguali a quelli del secondo, giacchè per l'eguaglianza de' rapporti dati, esistono le tre proporzioni:

$$a : b : : c : d,$$
$$a : b : : e : f,$$
$$a : b : : g : h,$$

che dànno rispettivamente $bc=ad$, $be=af$, $bg=ah$; dunque è vero ciò che si voleva dimostrare.

282. Se due proporzioni hanno gli antecedenti, ovvero i conseguenti rispettivamente eguali, i loro conseguenti nel primo caso, e gli antecedenti nel secondo, formano proporzione. Sia ad esempio:

$$a : b :: c : d$$

e

$$a : m :: c : n,$$

dico che si avrà

$$b : d :: m : n;$$

Infatti, alternando i medii nelle proporzioni date, otteniamo $a : c :: b : d$

e $a : c :: m : n$,

d'onde si ricava ciò che si voleva dimostrare,

$$b : d :: m : n,$$

a cagione della prima ragione comune.

Sia parimente

$$a : b :: c : d$$

e

$$m : b :: n : d,$$

alternando i medii si avrà

$$a : c :: b : d$$

e

$$m : n :: b : d,$$

d'onde, a cagione dell'ultima ragione comune, si ricava

$$a : c :: m : n,$$

ciò che era da dimostrare.

283. Una frazione, che abbia per numeratore la somma dei numeratori di più frazioni eguali e per denominatore la somma dei denominatori delle stesse frazioni, è uguale a ciascuna di queste. Così supponiamo $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ sarà $\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{a}{b}$.

Infatti le frazioni date formano una serie di rapporti eguali; la frazione poi che abbiamo formato non è altro che il rapporto della somma degli antecedenti

alla somma dei conseguenti dei rapporti dati, e già si è dimostrato, che in una serie di rapporti eguali la somma degli antecedenti sta a quella dei conseguenti, come ciascun antecedente sta al suo conseguente.

Allo stesso modo tutte le altre proprietà delle proporzioni dimostrate nei numeri precedenti si possono tradurre in linguaggio analogo al presente, chiamando rispettivamente frazioni, numeratori e denominatori i rapporti, gli antecedenti ed i conseguenti.

284. Una serie di rapporti eguali come i seguenti,

$$a : b :: c : d :: e : f$$

suolsi frequentemente scrivere in questo modo:

$$a : c : e :: b : d : f,$$

e si legge: a sta a c, sta a e, come b sta a d, sta a f. Questa scrittura equivale alle tre proporzioni

$$a : b :: c : d,$$
$$a : b :: e : f,$$
$$c : d :: e : f,$$

delle quali una qualunque è un corollario delle altre due. Nella proporzione che chiamerò *moltipla*,

$$a : c : e :: b : d : f,$$

i termini che precedono il segno :: sono gli antecedenti, e quelli che vengono dopo in ordine sono i rispettivi conseguenti.

285. Se sei quantità a, b, c, d, e, f sono tali che si abbiano le due proporzioni

$$a : b :: d : e,$$
$$b : c :: e : f,$$

ne seguirà pure la terza proporzione

$$a : c :: d : f.$$

Infatti moltiplicando le due prime termine a termine (272), e dividendo i due primi termini della pro-

porzione risultante per b, e i due ultimi per e (266), si troverà quello che si vuol dimostrare.

Quindi ne risulta che tra le sei quantità date si può scrivere la proporzione moltipla

$$a : b : c : : d : e : f.$$

286. Se in una proporzione moltipla qualunque

$$a : b : c : d : : e : f : g : h$$

esiste tra gli antecedenti la relazione $a = b + c + d$ la medesima relazione $e = f + g + h$ esiste tra i conseguenti. Infatti la proporzione moltipla data equivale a questa eguaglianza moltipla

$$\frac{a}{e} = \frac{b}{f} = \frac{c}{g} = \frac{d}{h};$$

ma le tre ultime frazioni eguali dànno, per ciò che si è detto nel numero 283,

$$\frac{b + c + d}{f + g + h} = \frac{a}{e},$$

e se queste due frazioni eguali hanno i numeratori eguali, avranno certamente eguali anche i denominatori. Dunque se è $a = b + c + d$ sarà pure $e = f + g + h$.

CAPO XII.

—

APPLICAZIONI DELLA TEORIA DE' RAPPORTI E DELLE PROPORZIONI

§ 1. Ragione inversa e diretta.

287. *Grandezze proporzionali*. Due quantità diconsi in ragione diretta, o direttamente proporzionali, quando crescendo l'una di esse, cresce l'altra nella medesima ragione. Così se un uomo cammina sempre colla medesima velocità, percorre spazii che sono in ragione diretta de' tempi impiegati a percorrerli, perchè se in un dato tempo percorre un determinato spazio, in un tempo doppio, triplo, quadruplo, ecc., percorre uno spazio doppio, triplo, quadruplo, ecc. Ciò si esprime dicendo che nel moto uniforme, ossia allorquando la velocità del mobile rimane costante, gli spazi e i tempi sono in ragione diretta, ossia sono direttamente proporzionali. Egualmente il lavoro fatto da un certo numero di operai è una quantità proporzionale al numero degli operai medesimi nell' ipotesi che questi lavorino durante tempi uguali e colla medesima energia. Un altro esempio lo abbiamo nelle frazioni aventi lo stesso denominatore, le quali stanno fra di loro come i loro numeratori, e sono perciò quantità proporzionali ai numeratori.

288. *Grandezze inversamente proporzionali.* Due quantità diconsi in ragione inversa o reciproca, op-

pure inversamente o reciprocamente proporzionali, quando, crescendo l'una di esse, diminuisce l'altra nella stessa ragione, e viceversa. Così percorrendo due viaggiatori una medesima distanza, è chiaro che impiegherà maggior tempo colui che camminerà con velocità minore, e viceversa, cosicchè i tempi impiegati dai due viaggiatori a percorrere un medesimo spazio sono in ragione inversa delle velocità rispettive, perchè crescendo queste, diminuiscono quelli e viceversa. Egualmente, il tempo impiegato da un certo numero di operai per far un lavoro determinato è tanto più corto quanto più è grande il numero degli operai; quindi queste due quantità, tempo e numero degli operai, nell'ipotesi fatta, sono inversamente proporzionali. Parimente noi sappiamo che di due frazioni aventi lo stesso numeratore è più grande quella che ha minore denominatore; e se un denominatore è due, tre, ecc., volte minore dell'altro, la frazione corrispondente è due, tre, ecc., volte più grande che l'altra. Dunque due frazioni aventi lo stesso numeratore sono inversamente proporzionali ai loro denominatori. Così si ha

$$\frac{3}{5} : \frac{3}{7} :: 7 : 5.$$

§ 2. Regola del tre semplice e composta.

289. *Regola del tre semplice.* La regola del tre semplice consiste nel trovare un termine mancante in una proporzione di cui tre termini sono dati, il che sappiamo già fare. Tutta la difficoltà si riduce a stabilire l'ordine dei termini, per il che darò una regola generale dopo che avremo veduto due esempi:

1° Supponendo che in una città in 10 giorni si consumino 60000 miriagrammi di pane, si domanda quanti miriagrammi si consumano di pane in un anno.

È chiaro che il pane consumato cresce nella medesima ragione del tempo, cosicchè il rapporto dei due tempi deve essere lo stesso che il rapporto delle quantità rispettive di pane consumato. Quindi chiamando x la quantità di pane che si cerca, dovrà esistere la proporzione:

$$10^{\text{giorni}} : 365^{\text{giorni}} :: 60000 : x.$$

Di qui, per la regola sopra data per trovare un termine mancante in una proporzione, si deduce la quantità domandata

$$x = \frac{365 \times 60000}{10} = 2190000.$$

Dunque in quella città si consumano 2 milioni e 190 mila miriagrammi di pane all'anno.

2° Per fare un determinato lavoro in 15 giorni ci vogliono 28 uomini; si domanda quanti uomini ci vorrebbero per fare lo stesso lavoro in 21 giorni.

Comincio a notare che quanto più è lungo il tempo in cui si fa il lavoro, tanto meno ci vorrà di uomini per farlo; cosicchè il numero degli uomini è in ragione inversa del tempo relativo. Chiamando pertanto x il numero cercato degli uomini, dovrà esistere la stessa ragione tra 21 e 15 che tra 28 e x, cosicchè avremmo

$$21 : 15 :: 28 : x,$$

d'onde $$x = \frac{15 \times 28}{21} = 20.$$

Dunque ci vorranno 20 uomini per fare quel lavoro in 21 giorni.

290. Si scorge dagli esempi precedenti che in ogni

problema di regola del tre semplice vi sono sempre tre quantità date, delle quali due sono tra loro omogenee, e la terza è omogenea coll'incognita del problema. Ecco la regola per istabilire la proporzione: Si scrivano per termini della prima ragione le due quantità note omogenee, e le altre due per termini della seconda ragione, badando di scrivere nella seconda ragione i termini nello stesso ordine di grandezza che nella prima; vale a dire se nella prima ragione si è scritto prima il termine maggiore, anche nella seconda si dovrà scrivere prima il termine maggiore, e viceversa. La natura del problema fa conoscere quale sia maggiore tra i due termini che formano la seconda ragione, ancorchè uno di essi sia incognito.

291. *Esempi:* 1° Un tale con 125 lire compera 28 metri di una stoffa; si vuol sapere quanti metri potrà comprare della medesima stoffa con 275 lire. *Risposta:* Metri $61+\frac{3}{5}=61'6$.

2° Un corpo d' armata di 70 mila uomini diede una battaglia, nella quale perdette tre uomini per cento. Si domanda quanti uomini in tutto siansi perduti. *Risposta*: 2100

292. *Regola del tre composta.* I problemi di regola del tre composta si possono risolvere con due proporzioni, come si vedrà ne' seguenti esempi:

1° Sapendo che 25 uomini in 7 giorni scavano un fosso lungo 100 metri, si domanda in quanti giorni 37 uomini scaveranno un fosso della stessa grandezza del primo, lungo 67 metri. Dispongo i dati come segue, ponendo x pel numero domandato di giorni

Uomini	giorni	metri
25	7	100
37	x	67

Digitized by Google

Supponendo che i 37 uomini lavorino per 7 giorni come i primi 25, cominciamo a cercare che lavoro farebbero. Se 25 uomini fanno 100 metri, nel medesimo tempo 37 uomini quanti metri faranno? Chiamando y il numero di questi metri, si otterrà il valore di y dalla seguente proporzione

$$25 : 37 : : 100 : y,$$

d'onde $$y=\frac{37\times100}{25}=148.$$

Dunque 37 uomini in 7 giorni farebbero 148 metri.

La quistione è ora ridotta a trovare che tempo impiegheranno questi uomini a fare 67 metri, sapendo che in 7 giorni ne fanno 148. Osservando che il numero dei metri è in ragione diretta del numero dei giorni, si formerà tosto la proporzione

$$148 : 67 : : 7 : x.$$

d'onde $$x=\frac{7\times67}{148}=\frac{469}{148}=3+\frac{25}{148}.$$

Dunque 37 uomini faranno 67 metri di lavoro in tre giorni e $\frac{25}{148}$ di giorno.

2º Si sa che 12 fontane eguali, versando acqua contemporaneamente, ne dànno 250 litri in 8 ore; si domanda quanti litri daranno in 11 ore 23 fontane eguali alle precedenti. Ecco i dati:

Fontane	ore	litri
12	8	250
23	11	x

Comincio a cercare quanti litri darebbero le 23 fontane se gettassero acqua durante 8 ore, come le prime 12. Chiamando y questo numero incognito di litri, si avrà per determinarlo

$$12 : 23 : : 250 : y,$$

d'onde $$y=\frac{23\times250}{12}=\frac{2875}{6}.$$

Conoscendo ora i litri che darebbero le 23 fontane in 8 ore, è facile trovare quanti verrebbero dati in 11 ore. Basta risolvere per ciò la seguente proporzione:

$$8 : 11 : : \frac{2875}{6} : x,$$

d' onde $x=\frac{2875\times11}{6\times8}=\frac{31625}{48}=658+\frac{41}{48}$.

Dunque le 23 fontane in 11 ore daranno litri 658 $\frac{41}{48}$.

293. Tutti i problemi di regola del tre composta, qualunque sia il numero de'dati, possono sempre ridursi a due proporzioni, e risolversi come i precedenti.

Sia infatti il seguente problema: 25 operai, lavorando 8 ore al giorno, in 30 giorni scavano un fosso lungo 48 metri, largo 2, profondo 3; si domanda quanti giorni impiegheranno 24 operai, lavorando 10 ore al giorno, per iscavare un fosso lungo 37 metri, largo 3 e profondo 4, in un terreno di doppia durezza del primo. Ecco i dati:

Operai	ore	giorni	lunghezza	larghezza	profondità	durezza
25	8	30	48	2	3	1
24	10	x	37	3	4	2

I sette elementi di ciascuna linea orizzontale si possono ridurre a tre, come quelli dei problemi precedenti, nel modo che segue. Invece di dire che i 25 primi operai lavorano per 30 giorni otto ore al giorno, riducendo tutto in ore, possiamo dire che lavorano 30 volte 8 ore, ossia 240 ore. Egualmente i 24 operai lavoreranno x volte 10 ore ossia $10x$ ore. Nella stessa maniera i quattro dati relativi alla lunghezza, larghezza, profondità del fosso, e durezza del terreno moltiplicati tra di loro si riducono ad

un solo esprimente l'entità del lavoro. Quindi, invece dei precedenti, avremo i seguenti dati:

Operai	ore	lavoro
25	240	288
24	$10x$	888

Supponendo ora che i 24 operai lavorino per 240 ore come i primi, cerchiamo che lavoro farebbero. Ciò si ottiene dietro i seguenti dati; 25 operai fanno un lavoro rappresentato da 288; che lavoro fanno 24 operai nel medesimo tempo? Applicando la regola sopra esposta del tre semplice, otterremo la seguente proporzione in cui y rappresenta il lavoro cercato:

$$25 : 24 : : 288 : y,$$

d'onde
$$y = \frac{24 \times 288}{25} = \frac{6912}{25}.$$

Sapendo ora che 24 operai in 240 ore fanno un lavoro rappresentato da $\frac{6912}{25}$, si cerca che tempo impiegheranno gli stessi operai a fare un lavoro rappresentato dal numero 888. Continuando a chiamare $10x$ le ore cercate, si avrà la proporzione

$$\frac{6912}{25} : 888 : : 240 : 10x.$$

Di qui si potrebbe ricavare il valore di $10x$, e poi dividendo per 10, si avrebbe il valore cercato di x; ma osservando che i due termini dell'ultima ragione sono ambidue divisibili per 10, e che dopo di averli divisi per questo numero, la ragione stessa diventa $24 : x$, si ricava tosto

$$x = \frac{24 \times 888}{\frac{6912}{25}} = \frac{24 \times 25 \times 888}{6912} = 77 + \frac{1}{12}.$$

I 24 operai impiegheranno adunque 77 giorni e $\frac{1}{12}$ di giorno per fare il lavoro dimandato.

294. Abbiamo risoluto i problemi di regola del tre composta con due proporzioni semplici; generalmente però si sogliono anche risolvere con una sola proporzione composta, al modo che segue.

Ripigliando il secondo esempio del num. 292, dopo che si è trovato la proporzione

$$12 : 23 : : 250 : y,$$

invece di ricavare da essa il valore di y per formare la seconda proporzione

$$8 : 11 : : \tfrac{2875}{6} : x,$$

si può ritenere y come noto, e scriverlo in questa ultima proporzione invece del suo valore che forma il terzo termine. Con ciò questa proporzione diventa

$$8 : 11 : : y : x.$$

Moltiplicando la prima proporzione con quest'ultima termine a termine si ottiene

$$8\times12 : 11\times23 : : 250y : xy;$$

e dividendo i termini del secondo rapporto per y, si ha finalmente

$$8\times12 : 11\times23 : : 250 : x,$$

dalla quale si ricava per x lo stesso valore che sopra.

Nello scrivere le due proporzioni semplici, le quali moltiplicate daranno la proporzione unica composta, conviene badare di ordinare i termini in modo che, dopo la moltiplicazione, l'incognita ausiliaria y possa scomparire colla divisione di due termini per y.

Applichiamo ancora questo metodo all'esempio del numero precedente, il quale è uno dei più complicati tra i problemi che si sogliono presentare nella regola del tre composta. Trascriviamo per ciò qui i dati:

Operai	ore	giorni	lunghezza	larghezza	profondità	durezza
25	8	30	48	2	3	1
24	10	x	37	3	4	2

Ecco come si suole ragionare. A parità di tutte le altre circostanze, se 25 operai impiegano 30 giorni per fare un lavoro, 24 operai quanti giorni impiegheranno? È chiaro che minore essendo il numero degli operai, più grande è il numero de' giorni necessari a fare un determinato lavoro. Chiamando x_1 questo numero cercato di giorni, si avrà, per la regola del tre semplice, la prima proporzione

$$\begin{matrix} \text{Operai} & \text{operai} & & \text{giorni} & \text{giorni} \\ 24 : & 25 & :: & 30 : & x_1. \end{matrix}$$

Il termine x_1 rappresenta qui il numero de'giorni in cui i 24 operai, se lavorassero 8 ore al giorno, farebbero il lavoro fatto dai 25 operai. Ma essi lavorano 10 ore al giorno, e non avranno per conseguenza bisogno di lavorare tanti giorni, quanti ne rappresenta x_1. Cerchiamo perciò quanti giorni dovranno lavorare, sapendo che le ore del lavoro sono 10 e non 8. Chiamando x_2 questo numero di giorni, la regola del 3 semplice somministrerà questa seconda proporzione:

$$\begin{matrix} \text{Ore} & \text{ore} & & \text{giorni} & \text{giorni} \\ 10 : & 8 & :: & x_1 : & x_2. \end{matrix}$$

I 24 operai impiegano adunque x_2 giorni per fare il medesimo lavoro che i 25 operai, lavorando quelli 10 e questi 8 ore. Ma i fossi scavati dalle due squadre di operai non hanno la medesima lunghezza. I giorni x_2 sono quelli che i 24 operai impiegherebbero per la lunghezza di 48 metri; ma i medesimi hanno solo da scavare una lunghezza di 37 metri; onde impiegheranno un numero di giorni che chiameremo x_3 e che, per la regola del 3 semplice, si ricaverà da questa terza proporzione:

$$48 : 37 :: x_2 : x_3.$$

Lo stesso ragionamento, ripetuto rispetto alla larghezza, alla profondità ed alla durezza, dà le tre seguenti proporzioni:

$$2 : 3 : : x_3 : x_4,$$
$$3 : 4 : : x_4 : x_5,$$
$$1 : 2 : : x_5 : x,$$

nelle quali x_4 e x_5 rappresentano rispettivamente i numeri de'giorni corrispondenti alla larghezza ed alla profondità; x poi è l'incognita stessa del problema. Moltiplicando termine a termine le sei proporzioni ottenute, e dividendo i due ultimi termini della proporzione composta risultante pel fattore comune $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$, si trova

$$1 \times 3 \times 2 \times 48 \times 10 \times 24 : 2 \times 4 \times 3 \times 37 \times 8 \times 25 : : 30 : x,$$

d'onde si ricava per x lo stesso valore che sopra. Notisi che nel calcolare questo valore di x, il quale è

$$x = \frac{2 \times 4 \times 3 \times 37 \times 8 \times 25 \times 30}{1 \times 3 \times 2 \times 48 \times 10 \times 24},$$

prima di eseguire le moltiplicazioni indicate, conviene sopprimere i fattori comuni ai termini della frazione, con che il valore di x diventa in questo caso

$$x = \frac{37 \times 25}{12} = 77 + \frac{1}{12}.$$

295. Chi ha ben compreso i ragionamenti che precedono, facilmente scorgerà potersi ridurre la soluzione di questo genere di problemi alla seguente semplicissima regola, che applicherò all'esempio ora trattato.

$$\left.\begin{array}{r} 24 : 25 \\ 10 : \ 8 \\ 48 : 37 \\ 2 : \ 3 \\ 3 : \ 4 \\ 1 : \ 2 \end{array}\right| \quad 30 : x$$

Scrivo a destra di una retta verticale il rapporto 30 : x delle due quantità omogenee, una delle quali è l'incognita del problema, ed a sinistra della stessa retta scrivo i rapporti delle altre quantità omogenee due a due in ordine diretto o inverso secondo che ciascuno di essi è diretto od inverso col rapporto già scritto. Nel nostro caso i termini del rapporto a destra della retta rappresentano giorni, ed è chiaro che tanto meno si richiederà di operai, quanto più s'impiegheranno giorni per fare un lavoro; sono dunque i numeri degli operai in ragione inversa dei numeri dei giorni, onde scrivo questo primo rapporto 24 : 25 in senso inverso di quello de'giorni. Egualmente quanto più s'impiegherà di giorni per fare il lavoro e tanto minore sarà il numero delle ore da lavorare per ogni giorno. Le ore adunque sono in ragione inversa dei giorni, e scriverò il secondo rapporto non 8 : 10 nell'ordine dei giorni, ma 10 : 8 nell'ordine inverso. Essendo le altre quantità, che rimangono, in ragione diretta de' giorni, scrivo sotto i loro rapporti diretti. Ciò fatto, moltiplico per ordine termine a termine i rapporti a sinistra nella linea e formo un rapporto composto, il quale è uguale al rapporto a destra. Nasce così la proporzione risolvente il problema. Senza scrivere questa proporzione, si ricava subito il valore di x, che è uguale al prodotto che ha per fattori il numero 30 e tutti i numeri della seconda colonna verticale a sinistra della linea, diviso pel prodotto dei numeri della prima colonna. Nello scrivere questo valore di x si possono già sopprimere tutti i fattori che a prima vista si scorgono comuni ai due termini della divisione.

Ben si vede da questo esempio come si dovrebbe procedere per un altro caso qualunque.

296. *Metodo di riduzione all'unità.* Tutte le questioni precedenti di regola del tre semplice e composta si sogliono pure risolvere col metodo detto di riduzione all'unità. Farò comprendere in che consista questo metodo applicandolo ad alcuni esempi. Ripigliamo il primo esempio del n° 289. In una città si consumano 60000 miriagrammi di pane in 10 giorni; quanti miriagrammi si consumeranno in 365 giorni? Se in 10 giorni si consumano 60000 miriagrammi di pane, in un giorno se ne consuma la decima parte, cioè 6000, ed in 365 giorni se ne consuma 365 volte 6000, cioè $365 \times 6000 = 2190000$, risultato eguale a quello del numero citato.

Prendiamo ancora il 2° esempio del numero 289. Ecco la soluzione: Se 28 uomini fanno un lavoro in 15 giorni, per fare lo stesso lavoro in un giorno ci vorranno 15 volte 28 uomini, perchè ci vuol tanto più di operai quanto più il tempo è corto. Dunque 15×28 uomini farebbero quel lavoro in un giorno, onde per fare lo stesso lavoro in 21 giorni ci vorrà un numero d'uomini 21 volta minore, ossia ci vorranno uomini $\frac{15 \times 28}{21} = 20$, come nel numero citato.

Proviamoci ancora a risolvere con questo metodo il secondo esempio del n° 292. Ecco come ragiono: Se 12 fontane in otto ore dànno 250 litri, una fontana sola nello stesso tempo darà un numero di litri 12 volte minore, cioè darà $\frac{250}{12}$ litri; ed in un'ora la stessa fontana darà la ottava parte di questa quantità, cioè darà litri $\frac{250}{12 \times 8}$. Quindi le 23 fontane

daranno all'ora $23 \times \frac{250}{12 \times 8} = \frac{23 \times 250}{12 \times 8}$ litri, ed in 11 ore ne daranno 11 volte tanto, cioè

$$\frac{11 \times 23 \times 250}{12 \times 8} = \frac{11 \times 23 \times 125}{6 \times 8} = \frac{31625}{48} = 658 + \frac{41}{48},$$

come nel luogo citato.

Questo metodo si dice di riduzione all'unità, perchè si cerca sempre il valore di uno degli elementi del problema corrispondente all'unità di un altro elemento.

§ 3. Regola d'interesse.

297. S'impieghi un capitale a un tanto per cento durante un certo tempo; la regola d'interesse è quella mercè cui si stabilisce una relazione tra il capitale impiegato, il frutto che se ne ricava, il tempo per cui s'impiega il capitale, e la *tassa* ossia il tanto per cento annuo. Questo problema si risolve colla regola del tre semplice: infatti chiamando c il capitale impiegato, t il tempo o il numero degli anni per cui dura l'impiego, i la tassa o l'interesse annuo del capitale 100, f il frutto o l'interesse che si ottiene dall'intero capitale c nel tempo t, osservando che se l'interesse è i per cento all'anno sarà di it per cento ogni t anni, si avrà la proporzione

$$100 : c :: it : f,$$

la quale si ricava da ciò, che se il capitale 100 dà il frutto it, il capitale c dovrà dare nel medesimo tempo t il frutto f, e tra i capitali passa la medesima ragione che tra gli interessi rispettivi.

Eguagliando il prodotto de'medii a quello degli estremi, si ha l'eguaglianza $100f=cit$, la quale risoluta successivamente per rapporto a f, c, i, t, serve a risolvere tutti i problemi d'interesse semplice, e dà le formole

$$f=\frac{cit}{100},\quad c=\frac{100f}{it},\quad i=\frac{100f}{ct},\quad t=\frac{100f}{ci}.$$

298. Tutti i problemi d'interesse semplice si riducono ai quattro seguenti, e si risolvono colle formole ora trovate:

1° Conosciuto il capitale, l'interesse annuo per cento, detto *tassa*, ed il tempo, trovare il frutto o l'interesse di quel capitale;

2° Conosciuto il frutto di un capitale, la tassa ed il tempo, trovare il valore del capitale stesso;

3° Conosciuto il frutto, il capitale e il tempo, trovare la tassa;

4° Conosciuto il frutto, il capitale e la tassa, trovare il tempo.

Ecco un esempio numerico di ciascun di questi problemi:

1° Un tale vuol sapere quanto gli frutterà in 5 anni il capitale di 8000 lire al 4 per cento.

Risposta 1600.

2° Si domanda qual capitale si debba impiegare al 3 per 100 onde ottenere in 7 anni il frutto di 1000 lire.

Risposta: 4761'90.

3° A quanto per 100 si deve impiegare il capitale di 20000 lire affinchè renda in sei anni 6000 lire?

Risposta: 5.

4° Per quanti anni si dovrà impiegare il capitale

di lire 500, affinchè al 6 per 100 annuo dia un frutto di lire 1000?

Risposta: 33 anni e quattro mesi.

299. Questa medesima regola si segue nella formazione delle tavole statistiche ed in tutte le operazioni nelle quali si tratta di trovare il quanto per 100 o per 1000, o per un altro numero qualunque importa di una determinata quantità. Così dal quadro della pagina 28 si scorge che in Toscana, per esempio, sopra 1003185 abitanti maschi 241774 sanno leggere e scrivere, si può dimandare quanti per 100 sappiano leggere e scrivere. La proporzione

$$1003185 : 241774 :: 100 : x$$

risolve il problema. In generale se sopra a oggetti, b godano di una qualità, e si voglia sapere quanti per 100 godano di questa medesima qualità, si avrà la soluzione dalla proporzione

$$a : b :: 100 : x,$$

la quale, oltre al problema proposto, serve ancora a risolvere i problemi in cui si cerca a, oppure b, quando si conoscano b e x, oppure a e x.

Gli studiosi possono fare sopra il quadro citato della pag. 28 molti utili esercizi in questo senso.

§ 4. Regola di sconto.

300. Un tale ha un credito di un capitale pagabile dopo un certo tempo. Volendo riscuotere attualmente questo capitale, dovrà perderci sopra una certa somma la quale prende il nome di *sconto*. Lo sconto si contratta ordinariamente a un tanto per 100; il modo di calcolarlo in pratica è il seguente:

Sia il credito di 800 lire pagabile fra due anni.

Riscuotendo questa somma attualmente, si domanda quale sarà lo sconto da farsi al cinque per 100 all'anno. Si calcola perciò colla regola d'interesse il frutto che dànno al 5 per 100 le 800 lire in due anni, frutto che ammonta ad 80 lire, e questo costituisce lo sconto. Cosicchè invece di 800 lire, si riceveranno solo attualmente 800—80 lire, ossia lire 720. Quest'ultimo valore dicesi *somma scontata*, o *capitale scontato*.

La regola di sconto in pratica non è dunque altro che una semplice regola d'interesse, e si risolve colla prima delle quattro formole del numero 297, in cui f in questo caso rappresenta lo sconto da fare. La somma scontata sarà rappresentata da

$$c-f=c-\frac{cit}{100}=\frac{100c-cit}{100}=\frac{c(100-it)}{100}.$$

Questa è la formola che applicasi in commercio per trovare la somma da pagarsi nello sconto. Frequentemente nello sconto commerciale non si bada al tempo, vale a dire si ritiene questo come eguale all'unità, scontando la somma a un tanto per cento, qualunque sia il tempo. Così un fabbricante cede una merce ad un rivenditore collo sconto del 20 per 100, ad esempio. Sia c il prezzo totale della merce. Bisognerà togliere da c i 20 centesimi di c, ossia la somma scontata sarà gli 80 centesimi di c; cosicchè basta, per calcolarla, moltiplicare c per 80, e dividere il prodotto per 100.

301. Ragionevolmente però lo sconto dovrebbe farsi in quest'altro modo. Dovrebbe cioè il compratore del credito pagare per questo un capitale, il quale, collocato all'interesse convenuto, riproducesse un capitale eguale al credito alla scadenza di questo.

In tale modo il problema si ridurrebbe alla determinazione del capitale che impiegato per un tempo determinato ad una tassa convenuta produce un frutto, il quale, aggiunto al capitale stesso, darà una somma voluta. Sia il credito di lire 1200 realizzabile fra un anno, che si voglia scontare attualmente al 5 per 100; per trovare il valore attuale x di quel credito, ragiono così: se il capitale attuale 100 in un anno diviene 105, quale sarà il capitale attuale x che diverrà in un anno 1200? Dalla norma sopra data per ridurre in proporzione i problemi di regola del 3 semplice, si deduce tosto la proporzione

$$105 : 1200 :: 100 : x,$$

d'onde $$x = \frac{1200 \times 100}{105} = 1142'85.$$

Sottraendo questo valore di x da 1200 lire, si avrà il valore dello sconto.

Se si fosse calcolato questo medesimo esempio col primo metodo si sarebbe trovato pel capitale scontato la somma di lire 1140, ed il creditore avrebbe perduto lire 2'85.

In commercio si adopera il primo metodo perchè più spediente e più favorevole a chi espone il denaro comprando il credito.

§ 5. Regola di società e di partizione.

302. Vari socii impiegano insieme capitali differenti; in capo a qualche tempo risulta un capitale da dividersi fra i medesimi in proporzione delle messe rispettive, si domanda quale sia la somma che spetta a ciascuno di essi. Questa ricerca costi-

tuisce lo scopo della regola di società. Ecco come si risolve. I socii A, B, C, D hanno impiegato le somme rispettive di 200, 450, 125, 340 lire; hanno da dividersi in proporzione un guadagno di 3000 lire. Per trovare la somma che spetta a ciascuno, osservo che l'intiero capitale di 1115 lire, somma delle somme impiegate, ha fruttato in tutto 3000 lire; quindi troverò il frutto di ciascun capitale parziale colle seguenti proporzioni, nelle quali i termini a, b, c, d rappresentano le quote spettanti ai socii rispettivi A, B, C, D.

$$1115 : 200 :: 3000 : a = \frac{200 \times 3000}{1115} = 538{\cdot}12$$

$$1115 : 450 :: 3000 : b = \frac{450 \times 3000}{1115} = 1210{\cdot}76$$

$$1115 : 125 :: 3000 : c = \frac{125 \times 3000}{1115} = 336{\cdot}32$$

$$1115 : 340 :: 3000 : d = \frac{340 \times 3000}{1115} = 914{\cdot}80$$

Ecco pertanto trovate le quote spettanti a ciascun socio. Si noti che essendosi trascurati i millesimi di lira, i socii B e C hanno qualche frazione di centesimo di meno, e gli altri due qualche frazione di centesimo di più della loro vera quota.

303. Se i medesimi socii avessero impiegato i loro capitali per tempi differenti, sarebbe stato necessario tener conto di questa differenza nella determinazione delle quote rispettive. Supponiamo che le somme impiegate dai socii siano le stesse che nell'esempio precedente, e che il socio A abbia lasciato nell'impiego la sua messa per 3 anni, il socio B per 2, il socio C per 5, il socio D per 4. Egli è chiaro che il socio A, il quale ha impiegato 200 lire per 3 anni, avrebbe

lo stesso diritto ai frutti se avesse impiegato una somma tripla per un anno solo. Egualmente il diritto del socio B non cambierebbe se avesse impiegato per un anno solo una somma doppia di quella che impiegò per due anni; lo stesso può dirsi degli altri. Cosicchè moltiplicando le messe di ciaschedun socio per i tempi rispettivi, esse riduconsi tutte al medesimo tempo e si risolve il problema come nel primo caso.

304. La regola di società non è che un caso particolare di una regola più generale detta di *partizione*, la quale ha per oggetto di dividere una quantità in parti proporzionali a numeri dati. La somma di questi numeri deve sempre stare a ciascuno di essi, come la quantità da dividere sta ad una delle parti cercate.

Così sia da dividere il numero a in tre parti che stiano tra di loro come i numeri m, n, p. Chiamando x, y, z le tre parti del numero a, si dovranno avere le proporzioni

$$m+n+p : m : : a : x,$$
$$m+n+p : n : : a : y,$$
$$m+n+p : p : : a : z,$$

dalle quali si ricava

$$x=\frac{ma}{m+n+p};\ y=\frac{na}{m+n+p};\ z=\frac{pa}{m+n+p}.$$

Infatti dietro l'enunciato del problema dobbiamo avere la proporzione moltipla (284)

$$m : n : p : : x : y : z,$$

ossia $$m : x : : n : y : : p : z,$$

d'onde (281)

$$m+n+p : x+y+z : : m : x : : n : y : : p : z;$$

ed essendo $x+y+z=a$, queste proporzioni si riducono alle superiori che volevamo dimostrare.

Per verificare i tre valori trovati di x, y, z, osservo che la loro somma fa veramente a poichè

$$x+y+z=\frac{ma+na+pa}{m+n+p}=\frac{a(m+n+p)}{m+n+p}=a;$$

inoltre si vede facilmente che i medesimi stanno fra di loro come i numeri m, n, p.

§ 6. Regola congiunta o di cambio.

305. Questa regola ha per iscopo di determinare la relazione di due monete differenti, nota essendo la relazione di queste con altre monete. Per esempio, sapendo che

100 reali di Spagna valgono 26 franchi,
134 franchi » 25 scudi romani,
53 scudi romani » 67 ducati di Napoli,

si domanda quanti ducati di Napoli ci vogliono per fare 1200 reali di Spagna. Chiamo x il numero di questi ducati, e chiamo a il valore intrinseco di un reale, b quello del franco, c dello scudo romano, d del ducato di Napoli, intendendo per valore intrinseco di ciascuna di queste monete il loro valore riferito ad una medesima unità di moneta. Se un reale vale a, 100 reali varranno $100a$; così 26 franchi valgono $26b$, 25 scudi valgono $25c$, ecc. Si avranno dunque le uguaglianze:

$$100a=26b,$$
$$134b=25c,$$
$$53c=67d,$$
$$xd=1200a.$$

L'ultima eguaglianza è data da ciò, che x ducati debbono fare 1200 reali. Moltiplicando queste eguaglianze membro a membro, si ha

$$100\times134\times53xabcd=26\times25\times67\times1200\times abcd,$$

e dividendo ambi i membri per $abcd$,

$$100\times134\times53x=26\times25\times67\times1200,$$

d'onde $$x=\frac{26\times25\times67\times1200}{100\times134\times53}=73+\frac{31}{53}.$$

Dunque per fare 1200 reali di Spagna ci vogliono 73 ducati di Napoli, più $\frac{31}{53}$ di ducato.

Lo stesso problema suolsi ancora risolvere ragionando come segue: Se 100 reali valgono 26 franchi, un reale varrà $\frac{26}{100}$ di un franco; ma (pel secondo dato) un franco vale $\frac{25}{134}$ di uno scudo romano; dunque il reale varrà $\frac{26}{100}$ di $\frac{25}{134}$ di uno scudo romano. Inoltre lo scudo romano (pel terzo dato) vale $\frac{67}{53}$ di un ducato, dunque un reale varrà $\frac{26}{100}$ di $\frac{25}{134}$ di $\frac{67}{53}$ di un ducato, ossia vale ducati $\frac{26}{100}\times\frac{25}{134}\times\frac{67}{53}$, e 1200 reali faranno ducati

$$1200\times\frac{26}{100}\times\frac{25}{134}\times\frac{67}{53}=\frac{26\times25\times67\times1200}{100\times134\times53},$$

come sopra.

§ 7. Regola d'alligazione.

306. Lo scopo di questa regola è di trovare il prezzo medio di varie qualità di una merce, conoscendo il valore e la quantità di merce di ciascuna

qualità. I due esempi che seguono basteranno a far comprendere questa regola.

1° Un negoziante ha mescolato insieme varie qualità di frumento, cioè 11 ettolitri da 20 lire l'ettolitro, 19 ettolitri da 18 lire, 25 ettolitri da lire 21, e 30 ettolitri da 22 lire; si domanda il prezzo di ciascun ettolitro del miscuglio.

Perciò converrà cercare il prezzo del miscuglio totale e dividerlo per il numero totale degli ettolitri. Ecco come si dispone l'operazione:

11	ettol. da	20	lire fanno lire	220
19	»	18	»	342
25	»	21	»	525
30	»	22	»	660
85				1747

Dividendo il prezzo totale 1747 per 85, si ottiene pel prezzo domandato di ciascun ettolitro 20'55.

2° Si fondono insieme 3 pezzi d'argento, uno di 4 chilogrammi al titolo di '95, l'altro di 7 chilogrammi al titolo di '70, il terzo di 10 chilogrammi al titolo di '85. Si domanda il titolo della lega risultante.

NB. Allorquando un metallo prezioso si dice al titolo di '85, ad esempio, vuol dire che sopra 100 parti di esso, 85 sono di metallo puro, e le restanti sono di altro metallo non prezioso. Così il titolo delle monete nostre d'argento è '9, e significa che sopra nove parti di argento puro ve ne ha una di rame. Si ottiene il titolo di un pezzo d'argento dividendo il peso dell'argento puro contenuto nel pezzo per il peso totale di questo. Un chilogrammo d'argento al titolo di '9 contiene nove decimi di chilogrammo

d'argento puro; n chilogrammi, allo stesso titolo, conterranno $\dot{.}9 \times n$ chilogrammi d'argento puro.

Ciò posto, i

4	chil. al tit.	˙95	contengono d'arg. puro chil.	3˙80
7	»	˙70	»	4˙90
10	»	˙85	»	8˙50
21				17˙20

Per conseguenza sul peso totale di 21 chilogrammi avremo chilogrammi 17˙20 d'argento puro; dunque il titolo domandato sarà $\frac{17\cdot 20}{21} = \dot{}819$.

§ 8. Regola di falsa posizione.

307. *Semplice posizione*. Sia da trovare un numero che soddisfaccia a qualsivoglia condizioni date. Attribuiremo a quel numero incognito x un valore numerico arbitrario, il che si dice fare una falsa posizione, e cercheremo se il valore assunto sia tale da soddisfare alle condizioni del problema. Così, per esempio, il vero valore di x dovrebbe, giusta le condizioni imposte, generare un risultato R; invece noi avendo supposto, per falsa posizione, $x=a$, troviamo per risultato R′. Supponendo che i valori di x crescano in ragione de' risultati finali, e sapendo che, mentre x dovrebbe dare il risultato R, a dà il risultato R′, avremo per determinare x, la proporzione

$$R' : R :: a : x,$$

ossia

il risultato della falsa posizione : al risultato dato :: la falsa posizione : al numero cercato

Esempi: 1° Quale è il numero x tale, che, moltiplicandolo per 3, e aggiungendo al prodotto la metà del

numero stesso, e dividendo la somma ottenuta per 4, dia per risultato 100? Supponiamo che il numero cercato valga 16, avremo

$$16\times3=48;\ 48+8=56;\ 56\div4=14$$

abbiamo pertanto: risultato dato $=100$, risultato della falsa posizione $=14$, falsa posizione $=16$, e per conseguenza

$$14:100::16:x=16\times100\div14=\frac{800}{7}=114+\frac{2}{7}.$$

Infatti $\frac{800}{7}\times3=\frac{2400}{7}$; $\frac{2400}{7}+\frac{1}{2}$ di $\frac{800}{7}=\frac{2800}{7}=400$;

e $$400\div4=100.$$

2° Due locomotive si vanno incontro sulla ferrovia da Torino a Genova, partono insieme una da Torino colla velocità di 30 chilometri all'ora, l'altra da Genova colla velocità di 35. Si domanda a quante ore dopo la partenza esse s'incontreranno, sapendo che la lunghezza della ferrovia è di 166 chilometri.

Supponiamo che l'incontro si faccia dopo 2 ore.

$$30\times2=60;\ 35\times2=70;\ 60+70=130.$$

$$130:166::2:x=\frac{166}{65}=\text{ore } 2+\frac{36}{65}.$$

Infatti $30\times\frac{166}{65}=\frac{996}{13}$; $35\times\frac{166}{65}=\frac{1162}{13}$; $\frac{996}{13}+\frac{1162}{13}=166$.

308. *Doppia posizione*. Non sempre il precedente metodo conduce al risultato che si cerca. Invero sia da trovare il numero, il cui triplo accresciuto di 5 faccia 23. Sia 10 questo numero; abbiamo $10\times3+5=35$, e quindi

$$35:23::10:x=230\div35=46\div7,$$

risultato falso, poichè

$$\frac{46}{7}\times3+5=\frac{138}{7}+5=\frac{173}{7}=24+\frac{5}{7}.$$

Ciò significa che la proporzione superiormente supposta non è sempre legittima. Allora si ricorre alla

regola di doppia posizione, la quale ha il vantaggio di risolvere sempre rigorosamente i problemi che in algebra si dicono di 1° grado, e di far trovare con tutta l'approssimazione che si può desiderare le incognite nei problemi di grado superiore.

Si fanno due false posizioni, supponendo successivamente il numero cercato eguale ad un numero arbitrariamente assunto a, poi ad un altro b. Colla posizione a si ottiene un risultato che differisce di una quantità che indicheremo con r, dal risultato, che si sarebbe dovuto trovare, secondo il problema. Chiameremo questa differenza r l'*errore* della posizione a, o l'*errore* di a. Egualmente sia r' l'errore di b. Se r' sarà minore di r significherà che b sarà più prossimo al numero cercato, che non a, e viceversa. In ogni caso si suppone che il grado con cui le due posizioni si avvicinano al valore cercato sia proporzionale al grado con cui si avvicinano i risultati al risultato imposto dal problema. Quindi se i risultati delle posizioni fatte sono ambidue maggiori, od ambidue minori di quello voluto dal problema, dovrà sussistere la seguente proporzione: la differenza degli errori r ed r' sta ad uno di essi r od r', come la differenza delle posizioni a e b sta alla correzione da farsi alla posizione a o b. Se poi i risultati sono uno maggiore e l'altro minore del risultato voluto, allora nel primo termine di questa proporzione si sostituisce la somma alla differenza degli errori r ed r'. La correzione di a o di b potrà essere additiva, o sottrattiva, vale a dire il quarto termine della proporzione dovrà essere aggiunto, o sottratto da a o da b, secondo che indicheranno i risultati delle due posizioni e la grandezza relativa di queste.

Applichiamo questa regola all'esempio precedente, in cui la semplice posizione non riesce: trovare il numero il cui triplo, più cinque faccia 23. Abbiamo trovato che la posizione 10 dà il risultato 35 invece di 23. L'errore della posizione 10 è dunque $35-23=12$. Supponiamo ora il numero cercato eguale ad 8; avremo $8\times3+5=29$; cosicchè l'errore della posizione 8 è $29-23=6$. Quindi essendo questi errori nel medesimo senso, porremo la proporzione $12-6 : 12 : : 10-8$: *correzione* della posizione 10, che $=4$; oppure $12-6 : 6 : : 10-8$: *correzione* della posizione 8, che$=2$. Osservando che i due risultati delle posizioni sono maggiori di 23, e che crescendo i valori delle posizioni crescono i risultati, facilmente si scorgerà che ambedue queste correzioni sono sottrattive, cosicchè il numero cercato si otterrà sia da $10-4=6$, sia da $8-2=6$. Infatti $6\times3+5=23$.

Se dopo di aver trovato che la posizione 10 dà il risultato 35, coll' errore 12, avessimo fatto la posizione 5, la quale dà il risultato 20 coll'errore 3, avremmo trovato la correzione evidentemente additiva della posizione 5 colla proporzione

$$12+3 : 3 : : 10-5 : \textit{correzione} =1,$$

oppure avremmo trovato la correzione sottrattiva della posizione 10 colla proporzione

$$12+3 : 12 : : 10-5 : \textit{correzione} =4.$$

Quindi il numero cercato sarà $5+1$, o $10-4=6$.

In generale ritenendo le denominazioni superiori, si troverà la correzione di a colla seguente proporzione

$$r\pm r' : r : : b-a : \textit{correzione} =\frac{br-ar}{r\pm r'};$$

quindi il numero cercato sarà

$$x=a+\frac{br-ar}{r\pm r'}=\frac{br\pm ar'}{r\pm r'}.$$

Su questa formola è appoggiata la seguente antica regola materiale per risolvere i problemi di falsa posizione: si fa una croce di sant'Andrea, ed alle estremità delle braccia si scrivono superiormente le due posizioni *a* e *b*, e inferiormente gli errori ri-

spettivi *r* ed *r'*; si moltiplica in croce, una posizione, cioè, per l'errore dell'altra, e si scrivono sulle rispettive posizioni i prodotti, come si vede nella figura. Allora secondo che gli errori sono tutti e due nel medesimo senso (ambi per eccesso, od ambi per difetto), oppure in senso contrario (uno per eccesso, ed uno per difetto), si divide la differenza de' due prodotti per la differenza de' due errori, oppure la somma de' due prodotti per la somma de' due errori, ed il quoziente sarà il numero cercato.

309. Allorchè i problemi eccedono il primo grado, si può applicare la regola di falsa posizione per risolverli per approssimazione. Si assumeranno per posizione due numeri che siano già prossimi al numero cercato, ed applicando a questi la regola, si troverà un risultato, il quale in generale si accosterà ancora di più alla soluzione. Allora si riterrà questo risultato come una delle posizioni, la quale si combinerà con quella delle precedenti che già si trovò accostarsi maggiormente al numero cercato, e si otterrà una nuova maggiore approssimazione, e così si potrà continuare fino a che l'approssimazione abbia raggiunto quel grado che si desidera.

CAPO XIII.

SULLE APPROSSIMAZIONI NEI CALCOLI NUMERICI

310. Triplice è lo scopo che mi propongo in questo Capo: 1° Essendo dati uno o più numeri di molte cifre sui quali si debba eseguire una qualche operazione, di cui non importi avere il risultato esattissimo, ma basti ottenerlo con una determinata approssimazione, entro quali limiti si può abbreviare l'operazione per raggiungere l'approssimazione voluta?

2° Essendo dati uno o più numeri calcolati solo con un certo grado di approssimazione, quale è il grado di esattezza che si può conseguire nei risultati delle operazioni eseguite sui medesimi?

3° Con quale grado di esattezza conviene calcolare uno o più numeri, affinchè nelle operazioni che si eseguiranno sui medesimi si possa ottenere un grado di esattezza determinato?

Prima di entrare nelle poste quistioni, giova stabilire alcuni principii che potranno esserci utili nel seguito.

311. Allorchè si ha un valore approssimato di una quantità, la differenza tra il valore approssimato ed il vero valore della quantità è l'errore commesso e dicesi *errore assoluto*. Dicesi poi *errore relativo* il rapporto dell' errore assoluto al valore esatto della quantità. Così, sia la quantità $\sqrt{2}$, ed il suo valore approssimato in meno, esatto nei centesimi, 1·41;

l'errore assoluto di questo numero approssimato è $\sqrt{2}-1{\cdot}41$; l'errore relativo poi è

$$\frac{\sqrt{2}-1{\cdot}41}{\sqrt{2}}.$$

312. Allorquando si trascurano le ultime cifre di un numero, sia intiero, sia frazionario decimale, sostituendo alle cifre trascurate altrettanti zeri, l'errore assoluto commesso è minore di una unità dell'ordine rappresentato dall'ultima cifra non trascurata; e se questa cifra si corregge al modo che si è insegnato nel numero 176, lasciandola com'è se la prima cifra trascurata ha un valore minore di 5, o accrescendola di un' unità, se la prima cifra trascurata vale 5 o più, allora l' errore assoluto commesso è minore di mezza unità dell'ordine detto. Così sia il numero 3·141592; trascurando le tre ultime cifre si ottiene 3·141 con errore assoluto minore di un millesimo. Correggendo poi l' ultima cifra, giacchè dopo l'1 viene un 5, si avrà 3·142, valore ap prossimato con errore assoluto minore di un mezzo millesimo. Egualmente nel num. 3457128, trascurando le ultime tre cifre si ottiene 3457000 con errore minore di mille, anzi come dopo il 7 viene una cifra minore di 5 l'errore commesso è minore di mezzo migliaio. Nelle tavole dei logaritmi colla mantissa a sette cifre, l' ultima cifra è corretta, onde l' errore dei logaritmi di dette tavole è minore di mezza unità del settimo ordine.

313. Nella pratica il limite dell' errore assoluto che si può trascurare, ossia il grado di approssimazione a cui si aspira, dipende dalla natura o dal pregio dell' oggetto rappresentato dal numero. Così nella misura della distanza itineraria tra due città,

poco importa l'errore di alcuni metri; invece nella misura di una base di operazioni geodetiche sarebbe incomportabile l'errore di un metro. Così ancora nella misura del peso una vettura carica di merci ordinarie, poco importa l'errore di varii chilogrammi, mentre nella determinazione del peso di una mela, ad esempio, l'errore di un ettogrammo sarebbe enorme. Quest'ultimo esempio fa vedere che non è tanto l'errore assoluto che si debbe considerare nelle approssimazioni, quanto il relativo. Ciò premesso, veniamo a trattare ciascuna delle tre quistioni del num. 310.

Prima questione.

314. *Addizione abbreviata.* Siano da sommare i numeri qui scritti in colonna verticale, e si voglia la somma esatta nei centesimi

```
1307125'30012589
 101007'15012191
    978'00099370
      0'41789717
     88'15015781
    193'01231005
     15'09022013
----------------
1409407'119
```

Scritti i numeri come al solito per fare l'addizione, comincio l'operazione dalla colonna dei millesimi, trascurando le unità degli ordini inferiori. La somma trovata 1409407'119 o meglio 1409407'12 è il risultato domandato esatto ne' centesimi. Infatti avendo tenuto conto dei millesimi nei numeri da addizionare, l'errore assoluto commesso in ciascuno di questi

numeri è minore di un millesimo, onde l' errore del risultato è minore di tanti millesimi, quanti sono i numeri da sommare. Ma il numero di questi non supera 10, dunque l' errore totale del risultato è inferiore a 10 millesimi, ossia inferiore ad un centesimo, il che si voleva dimostrare. Se i numeri da sommare fossero stati più che 10, l' addizione si sarebbe cominciata dalla colonna dei decimillesimi; e da quella dei centomillesimi, se fossero stati più che cento. Ben si vede da questo esempio quali cifre si possano trascurare, ossia da quale colonna convenga cominciare l'addizione in ogni caso particolare.

315. *Sottrazione abbreviata.* Si domanda esatto nei decimillesimi il resto del numero 25'07089012 diminuito del numero 3'95034891. Ecco l' operazione:

$$\begin{array}{r} 25'0708912 \\ 3'95034891 \\ \hline 21'1205 \end{array}$$

Si comincia la sottrazione dai decimillesimi, ed il resto 21'1205 è il risultato esatto nei decimillesimi. Infatti avendo preso il minuendo ed il sottraendo ambi esatti ne' decimillesimi, l'errore di ciascuno di essi è minore di un decimillesimo; e come ambidue gli errori sono in meno, l'errore del risultato sarà *a fortiori* minore di un decimillesimo. Invero, se a e b sono il minuendo ed il sottraendo, e m ed n sono le parti positive rispettivamente neglette, l'operazione fatta equivale a sottrarre $b-n$ da $a-m$ in vece di b da a; onde si ottiene il risultato $a-m-(b-n)=a-b+n-m$, invece di $a-b$. L'errore totale commesso è $n-m$, ed essendo m ed n minori di un decimillesimo, *a fortiori* sarà minore di un decimillesimo la loro differenza.

316. *Moltiplicazione abbreviata.* Domandasi il prodotto di 3457'0712369, per 48'5183685 esatto nei decimi. Ecco la regola secondo cui suolsi fare questa operazione. Scrivo il moltiplicando al modo solito, e sotto di esso scrivo il moltiplicatore colle cifre in ordine inverso, senza tener conto dei punti, ed in modo che la cifra delle unità del moltiplicatore sia sotto la cifra dei millesimi del moltiplicando (in generale la cifra delle unità del moltiplicatore dev'essere sotto la cifra del moltiplicando, che rappresenta l'unità di due ordini inferiore a quella che si vuole ottenere esatta nel prodotto). Nel nostro caso la cifra 4 delle decine del moltiplicatore trovasi così sotto la cifra 2 de' decimillesimi del moltiplicando. Cominciando da questa cifra 2 del moltiplicando e andando verso sinistra, moltiplico tutta questa parte del moltiplicando per 4, e scrivo sotto la linea il prodotto parziale 138282848. Avendo così moltiplicato i decimillesimi per decine, questo prodotto rappresenta millesimi, e siccome la parte negletta nel moltiplicando è minore di un decimillesimo, così il primo prodotto parziale ottenuto differisce dal vero prodotto parziale, che si sarebbe ottenuto da questa cifra 4 del moltiplicatore, di meno di 4 millesimi. Moltiplico poscia allo stesso modo il moltiplicando per ciascuna cifra del moltiplicatore, cominciando ogni moltiplicazione da quella cifra del moltiplicando che sta direttamente sopra la cifra del moltiplicatore su cui si opera, e scrivo sotto i prodotti parziali in modo che le prime

```
34570712369
 586381584
-----------
 138282848
  27656568
   1728535
     34570
     27656
      1035
       204
        24
-----------
167731'440.
```

Digitized by Google

cifre a destra di ciascuno di essi siano in una medesima colonna. Ragionando come ho fatto pel primo prodotto parziale, si riconoscerà facilmente che tutti i prodotti parziali ottenuti rappresentano millesimi, e l'errore di ciascuno di essi è minore della cifra del moltiplicatore che lo ha dato moltiplicata per un millesimo.

L'ultimo prodotto parziale 24 è quello che corrisponde alla cifra 8 del moltiplicatore che è scritta sotto al 3 del moltiplicando. L'ultima cifra 5 del moltiplicatore, non avendo corrispondenti cifre nel moltiplicando, non dà alcun prodotto. La somma dei prodotti parziali dà 167731440 millesimi, con un grado d'approssimazione che vogliamo calcolare.

A cagione delle cifre trascurate alla destra del moltiplicando, gli errori dei prodotti parziali successivi sono, per quello che si è detto, rispettivamente minori di $4\times{}^{\cdot}001$; $8\times{}^{\cdot}001$; $5\times{}^{\cdot}001$; $1\times{}^{\cdot}001$; $8\times{}^{\cdot}001$; $3\times{}^{\cdot}001$; $6\times{}^{\cdot}001$; $8\times{}^{\cdot}001$; dunque l'errore totale è minore di $(4+8+5+1+8+3+6+8)\times{}^{\cdot}001$, ossia minore di $43\times{}^{\cdot}001$. Vediamo ora quale errore faccia commettere la cifra 5 negletta nel moltiplicatore. Questa cifra 5 nel moltiplicatore rappresenta un valore minore di un'unità dell'ordine dell'ultima cifra impiegata 8, ed una di queste unità moltiplicata per la cifra 3 corrispondente del moltiplicando darebbe 3 con un errore minore di un millesimo; dunque l'errore che si commette in tale maniera per le cifre neglette del moltiplicatore, qualunque sia il loro numero, è minore (nel nostro caso) di 4 millesimi. Aggiungendo questo errore al precedente $43\times{}^{\cdot}001$, si avrà in tutto un errore minore di $47\times{}^{\cdot}001={}^{\cdot}047$, quantità minore di un decimo. Dunque il prodotto 167731·4 è esatto nei decimi. Se il limite dell'errore calcolato fosse stato maggiore di

un decimo, si sarebbero dovute fare le moltiplicazioni parziali in modo che i prodotti rispettivi rappresentassero decimillesimi. Se il moltiplicando non avesse abbastanza di cifre alla destra sua per corrispondere a tutte quelle del moltiplicatore rovesciato, si riempirebbe la lacuna con zeri.

317. *Divisione abbreviata.* La difficoltà maggiore o minore di una divisione nasce più dal numero delle cifre del divisore, che da quello del dividendo. Per abbreviare adunque l' operazione è importante di semplificare al massimo grado il divisore. Per ciò comincio ad osservare che il limite dell'errore relativo (311) del quoziente di un dividendo esatto per un divisore approssimato è uguale all'errore relativo del divisore. Infatti sia a il dividendo e b il divisore, il quoziente sarà $\frac{a}{b}$ e se m è l' errore assoluto del divisore b, il quoziente con questo errore del divisore diventa $\frac{a}{b+m}$, e l'errore assoluto del quoziente sarà $\frac{a}{b}-\frac{a}{b+m}=\frac{am}{b(b+m)}$ quantità minore di $\frac{am}{b^2}$, e dividendo questo errore pel quoziente stesso $\frac{a}{b}$, si avrà per limite dell' errore relativo del quoziente $\frac{m}{b}$, che è precisamente l'errore relativo del divisore b.

318. Ciò posto, sia da dividere il numero 570˙6819 per 123˙07694, e si domandi il quoziente esatto nei centesimi. Si vede alla semplice ispezione che il quoziente cercato ha una sola cifra nella sua parte intiera, e che questa cifra è 4. L'ultima sua cifra che si vuole esatta essendo quella dei centesimi, ne segue

che, in tutto, il quoziente avrà tre cifre; e per essere 4 la prima di queste, il suo errore relativo sarà minore di $\frac{1}{400}$. Basterà dunque che l'errore relativo del divisore non sia maggiore di questa frazione, per poter asserire (317) che il quoziente avrà l'esattezza voluta. Prenderò pertanto le sole quattro prime cifre 1230 a sinistra del divisore, le quali mi dànno il divisore stesso con un errore relativo minore di $\frac{1}{1230}$, e perciò *a fortiori* minore di $\frac{1}{400}$ (notisi che tengo poco conto dei punti de' numeri dati, poichè allorquando saranno trovate le cifre utili del quoziente, sarà facile scrivere in esso il punto a posto). Dividendo adunque il numero 5706819 per 1230, o meglio per 1231, onde avere il quoziente peccante per difetto, trovo per le tre prime cifre del quoziente 463; onde il quoziente cercato esatto nei centesimi è 4·63.

319. Se la prima cifra del quoziente fosse stata inferiore alla prima del divisore, il ragionamento fatto avrebbe dimostrato essere sufficiente prendere nel divisore le tre prime cifre a sinistra. In generale volendosi il quoziente esatto fino a un certo limite, osservisi quante cifre in tutto avrà il quoziente spinto fino a questo limite, e quale sia la prima cifra a sinistra di esso. Se questa sarà minore della prima del divisore, basterà ritenere nel divisore a sinistra tante cifre, quante ne avrà il quoziente; nel caso contrario si prenderà nel divisore una cifra di più.

Non occorre qui parlare delle approssimazioni nella elevazione a potenza e nell'estrazione delle radici, essendo la prima di queste due operazioni compresa nella moltiplicazione, ed avendo già parlato abbastanza della seconda nel Capo X.

Seconda questione.

320. *Addizione.* Supponiamo ora i numeri dati solo per approssimazione, e cerchiamo i limiti dell'errore de' risultati. Supporremo in generale che l'errore dei numeri, su cui si opera, non ecceda mezza unità dell'ordine rappresentato dall'ultima cifra. Siano da sommare i seguenti numeri, calcolati fino alla settima cifra dopo il punto.

$$\begin{array}{r} 0·7120549 \\ 1·0139605 \\ 2·1132520 \\ 0·9874523 \\ 0·1720105 \\ \hline 4·9987302 \end{array}$$

Il limite dell'errore di ciascuno de' numeri dati essendo di mezza unità dell'ultimo ordine, e potendo aver luogo tanto in più quanto in meno, non si conosce quale sia l'errore commesso nella somma; ma facendo il caso più sfavorevole, e supponendo che i cinque numeri dati siano tutti approssimati in più o tutti in meno, possiamo sempre asserire che il limite dell'errore della somma è in più od in meno di cinque mezze unità dell' infimo ordine; onde non si può più contare sull' esattezza dell' ultima cifra.

321. L'esempio che precede basta per far vedere il modo di calcolare il limite dell'errore della somma, quando l'ultima cifra dei numeri sommati rappresenti in tutti unità dello stesso ordine. Ma quando la cifra erronea di uno, o di alcuni dei numeri da sommare, rappresenta unità di ordine superiore a quelle rappresentate dall'ultimâ cifra degli altri numeri, il li-

mite dell'errore dipende da quell'uno o pochi numeri; e sarebbe inutile nell'operazione spingere la ricerca delle cifre oltre quell'ordine di unità ove si trovano le approssimazioni più grossolane.

322. *Sottrazione.* Il ragionamento fatto nel numero 315 fa abbastanza vedere che, se le cifre peccanti del minuendo e del sottraendo sono dello stesso ordine, di questo medesimo ordine è pure la prima cifra peccante del resto. In caso contrario, la prima cifra difettosa del resto corrisponde alla cifra difettosa del minuendo o del sottraendo, la quale è dell'ordine più elevato.

323. *Moltiplicazione.* Siano a e b i due fattori dati per approssimazione, e m ed n gli errori assoluti rispettivi, qualunque sia il loro segno. Il vero prodotto sarà $(a+m)(b+n)=ab+an+bm+mn$. La differenza tra questo prodotto ed il prodotto ab sarà l'errore commesso, il quale è perciò $an+bm+mn$. In ogni caso adunque l'errore commesso è dato dalla somma dei prodotti di ciascun fattore per l'errore dell'altro, più il prodotto dei due errori. Sia, per esempio, da moltiplicare 3'1416 per 457'19, essendo l'errore delle ultime cifre non superiore di mezza unità del loro ordine rispettivo. L'errore del prodotto non potrà eccedere la somma seguente

$$\frac{1}{20000}\times 457'19+\frac{1}{200}\times 3'1416+\frac{1}{20000}\times\frac{1}{200}.$$

324. Per conoscere l'errore relativo del prodotto, dividiamo l'errore assoluto $an+bm+mn$ pel prodotto $(a+m)(b+n)$ ed avremo $\frac{an+bm+mn}{(a+m)(b+n)}$, quantità evidentemente minore di $\frac{an+bm+mn}{ab}=\frac{n}{b}+\frac{m}{a}+\frac{mn}{ab}$,

se i numeri a e b sono approssimati in meno. Dunque il limite dell'errore relativo del prodotto di due fattori approssimati in meno è $\frac{n}{b}+\frac{m}{a}+\frac{mn}{ab}$, ossia vale la somma de' limiti degli errori relativi de' due fattori, più il prodotto di questi limiti.

325. *Divisione.* Siano a e b il dividendo ed il divisore approssimati; $a+m$ e $b+n$ i loro veri valori, potendo m ed n essere quantità positive o negative. L'errore assoluto del quoziente sarà

$$\frac{a+m}{b+n}-\frac{a}{b}=\frac{b(a+m)-a(b+n)}{b(b+n)}=\frac{bm-an}{b(b+n)}.$$

Dividendo questo errore assoluto pel vero quoziente, si avrà l'errore relativo del quoziente stesso espresso da $\frac{bm-an}{b(a+m)}$.

Se sarà n positivo, ossia se b pecca per difetto, avremo $b(b+n)>b^2$; onde l'errore assoluto sarà minore di $\frac{bm-an}{b^2}=\frac{m}{b}-\frac{an}{b^2}$.

Se sarà m positivo, ossia se a pecca per difetto, avremo $b(a+m)>ab$; onde l'errore relativo sarà minore di $\frac{bm-an}{ab}=\frac{m}{a}-\frac{n}{b}$.

326. *Estrazione della radice quadrata.* Sia, ad esempio, il numero 50·48 esatto nei centesimi, dal quale si voglia estrarre la radice quadrata; si domanda il grado di esattezza che si può ottenere nel risultato. Supponendo che il numero dato pecchi per difetto, il suo vero valore sarà compreso tra 50·48 e 50·49. Onde la radice cercata è compresa tra $\sqrt{50\cdot48}$ e $\sqrt{50\cdot49}$. Prendendo per la radice cercata la

semisomma di questi due radicali si commetterà un errore avente per limite la semidifferenza dei radicali stessi. Dunque si può ottenere un risultato in cui il limite dell'errore è

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{50{\cdot}49}-\sqrt{50{\cdot}48})$$

$$=\tfrac{1}{2}\frac{(\sqrt{50{\cdot}49}-\sqrt{50{\cdot}48})(\sqrt{50{\cdot}49}+\sqrt{50{\cdot}48})}{\sqrt{50{\cdot}49}+\sqrt{50{\cdot}48}}$$

$$=\tfrac{1}{2}\frac{50{\cdot}49-50{\cdot}48}{\sqrt{50{\cdot}49}+\sqrt{50{\cdot}48}}<\frac{{\cdot}01}{4\sqrt{50{\cdot}48}}<\frac{{\cdot}01}{28}.$$

Dunque si può trovare il risultato domandato con un errore minore di quest'ultima frazione, ossia con un errore minore di $\frac{1}{2800}$; cosicchè, sebbene non siano date che due cifre a destra del punto del numero da cui si deve estrarre la radice, tuttavia si può questa trovare con tre cifre esatte nell'esempio dato.

Il ragionamento qui fatto si può applicare a qualunque altro numero. In generale siano a e b due numeri, il primo più piccolo ed il secondo più grande del numero da cui si vuole estrarre la radice. Prendendo per questa $\frac{1}{2}(\sqrt{b}+\sqrt{a})$, il limite dell' errore sarà $\frac{1}{2}(\sqrt{b}-\sqrt{a})$, ossia (moltiplicando e dividendo a un tempo questa quantità per $\sqrt{b}+\sqrt{a}$) sarà $\frac{1}{2}\frac{a-b}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$ quantità minore di $\frac{a-b}{4\sqrt{a}}$.

327. *Estrazione della radice cubica.* Sia n il numero dato per approssimazione, da cui si vuole estrarre la radice cubica, e siano a e b i due numeri conosciuti più prossimi al vero valore da cui si dovrebbe estrarre la radice cubica, uno minore e

l'altro maggiore di n. La radice cubica più approssimata che si potrà ottenere sarà $\frac{1}{2}(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})$, ed il limite dell' errore commesso sarà

$$\frac{1}{2}(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})-\sqrt[3]{a}=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a}).$$

Ma moltiplicando e dividendo contemporaneamente quest'ultima espressione per $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$, e badando che in generale si ha $\sqrt[3]{m}\times\sqrt[3]{n}=\sqrt[3]{mn}$, essa diviene $\frac{1}{2}\frac{b-a}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$. Ora supponendo $a<b$, e sostituendo b ad a nel denominatore, si riconosce tosto che questa quantità è minore di $\frac{b-a}{6\sqrt[3]{a^2}}$, la qual formola esprime il limite dell'errore di cui si tratta.

Terza questione.

328. Le regole date ed i ragionamenti fatti intorno alla seconda quistione si applicano troppo facilmente alla terza, senza che sia d'uopo che ci estendiamo qui maggiormente intorno alla medesima.

CAPO XIV.

—

ALCUNE NOZIONI SULLA STORIA DELL'ARITMETICA

329. *Popoli primitivi.* L'idea de' numeri e l'aritmetica hanno dovuto nascere colla società degli uomini. Invero, incontrandosi insieme alcuni individui, non vi ha niente di più naturale che il numerarsi a vicenda; andando a caccia, o raccogliendo frutta, nasce di per sè la curiosità di sapere quanti oggetti si portano a casa; scambiando una cosa nostra con cose altrui, si fa un contratto che raramente è scevro da numeri.

Ma dallo studio degl'indigeni americani e de' moderni selvaggi possiamo inferire che i primitivi popoli avessero un' aritmetica ben meschina, e che alcuni di essi non sapessero distinguere i numeri al di là di dieci o forse meno ancora, cosicchè per esprimere un gran numero erano costretti a mostrare le stelle del cielo, o un mucchio di sabbia, o un pugno di capelli.

Se ristrette erano le idee, e proporzionate alle primitive intelligenze, non erano più estesi i mezzi di registrarle. Pietre più o meno grosse, forse con qualche segnale sopravi, rami più o meno nodosi, corde variamente intrecciate, ecco i registri di quei popoli. Da questi grossolani mezzi alla scritturazione su pelli, libri, papiri, pergamene e più ancora sulla moderna nostra carta, passa tanta differenza, quanta

dall'aritmetica primitiva all'aritmetica nostra, o dai nodi funicolari ai libri in doppia partita inventati dagl'Italiani commercianti al tempo delle repubbliche, o dal disegno, con cui gli americani espressero al loro principe Montezuma il primo approdo degli spagnuoli, alle più belle descrizioni dei nostri letterati.

330. *Origine dell'aritmetica.* L'aritmetica, come scienza che insegna a fare le prime operazioni sui numeri e indaga le proprietà di questi, vuoi per le comuni applicazioni, vuoi per semplice esercizio intellettuale, non è creazione di un uomo solo, nè d'un solo popolo, sebbene gli storici vogliano chi a questi, e chi a quelli, attribuirne il merito.

I Caldei, così diligenti osservatori de' moti celesti, e che ci trasmisero i più antichi cicli astronomici conosciuti, non hanno potuto ciò fare senza un'aritmetica propria.

Gli Egizi, obbligati a continue misure di terreni dalle inondazioni del fiume, dovevano pure conoscere le operazioni sui numeri.

Che diremo de' Fenici navigatori e commercianti per eccellenza, se l'industria loro trova il principale appoggio nella conservazione delle date e nel numero e valore delle merci?

Gl'Indiani poi ed i Cinesi, conservatori tenaci delle primitive usanze e abborrenti dagli stranieri trovati, se ebbero più tardi ed hanno ora un'aritmetica propria, è poco probabile che essi l'abbiano ricevuta in origine dal di fuori.

Se leggiamo poi il pentateuco, vi troviamo continua menzione di date, di pesi e di misure, la qual cosa suppone un'aritmetica non affatto rudimentale.

A chi dunque attribuiremo l'onore d' aver dato l'aritmetica alla società? Ai dotti la questione.

331. *Sistemi di numerazione.* Ciò che potrà parere a prima vista inesplicabile, se vogliamo ammettere che ciascun popolo abbiasi creato la propria aritmetica, è la grande universalità del sistema decimale di numerazione. Ma troviamo una spiegazione sufficiente di questo fatto nel numero delle dita delle nostre mani, il quale somministrò la base del sistema. L'invenzione poi delle unità de' varii ordini sarà stata suggerita dalle pietre (*calcolo=sassolino*) di varia grossezza, con cui si registravano probabilmente le unità semplici, le decine, le decine di decine, ecc.

Del resto vi furono popoli con sistemi di numerazione diversi e più semplici, come il binario, il ternario, ecc., e per ciò più adatti alla debolezza primitiva delle facoltà intellettuali.

332. *Introduzione in Europa.* I primitivi popoli europei avranno probabilmente avuto essi pure i loro meriti nell'invenzione dell'aritmetica; ma nulla ce ne dicono di certo le storie. È tradizione antica che Cadmo abbia primo portato dall'Asia in Grecia le lettere dell'alfabeto. Ma chi fosse questo Cadmo nessuno lo sa, ed il nome stesso è parola generica che vuol dire orientale, cosicchè ciò non significherebbe altro, se non che i Greci avrebbero ricevuto dall'oriente l'arte di scrivere. Le primitive lettere, greche e romane, erano tutte maiuscole, e le minuscole non furono introdotte che assai più tardi e per comodità dagli amanuensi.

Presso i Greci ed i Romani le lettere erano pure i simboli de' numeri, e corrispondevano alle nostre cifre, ma non avevano un valore di posizione.

L'analogia de' nomi e della forma di alcune lettere greche colle caldeo-ebraiche fece supporre che i Greci

abbiano potuto ricevere dagli Ebrei, forse durante la schiavitù egiziana, il loro alfabeto.

333. *Tempi storici.* Il primo che la storia ci addita in modo incontestabile come maestro di cose riguardanti la scienza de' numeri è Talete (640 A. C.). Ma l'aritmetica di quei tempi era ben lungi dall'avere lo sviluppo ch' ebbe più tardi. Probabilmente si riduceva alle due prime operazioni, addizione e sottrazione, ed a qualche astratta considerazione sui numeri.

Incontriamo dopo, e per ordine, Pitagora (550 A. C.), a cui si attribuisce la tavola di moltiplicazione dei numeri di una cifra, chiamata con greco vocabolo *abaco* che significa *tavola.* Egli ed i suoi seguaci sono gli autori di molte speculazioni sui numeri che distinguevano in perfetti e non, in triangolari, poligoni, piramidali, ecc., ecc., cose in sè di poca o nessuna entità, ma ottime per le conseguenze di cui furono feconde, poichè le ricerche ad esse relative condussero i filosofi alla cognizione di molte proprietà de' numeri ed a gettare le basi della moderna matematica.

Teone (420 A. C.) scrisse pure opere di aritmetica, di cui Platone deplora la perdita.

Platone poi diede un grandissimo impulso allo studio delle matematiche. Egli conosceva le quattro operazioni e l'estrazione delle radici quadrate e cubiche, e le progressioni.

Euclide, autore del più antico trattato di geometria, che si conosca, modello da imitarsi in questo genere di libri, si occupò anche molto dell'aritmetica; trattò della natura de' numeri primi; dimostrò che una frazione i cui termini sono primi tra di loro, è irreducibile; diede la regola per trovare il massimo comune divisore di due o più numeri; dimostrò

la costanza del prodotto col variare l'ordine de' fattori; dimostrò che il numero de' numeri primi è infinito, ecc., ecc.

Aristotile (350 A. C.) non fu grande promotore degli studi matematici, ma fa conoscere che ai suoi tempi le conquiste precedenti nel campo dell'aritmetica erano già divenute famigliari a molti.

Un secolo più tardi troviamo fiorenti quasi contemporaneamente Eratostene, celebre per la misura della terra e pel crivello de' numeri primi, che porta il suo nome; Archimede, grande non solo nell'aritmetica, ma ancora nelle arti meccaniche e nella fisica matematica, Apollonio, Nicomaco, ecc.

Archimede cercò e propose un sistema di numerazione atto ad esprimere qualunque numero, comunque grande. La sua unità di secondo ordine corrispondeva al quadrato di 10000. Apollonio ridusse le unità d'Archimede a gruppi minori e più comodi, approssimandosi maggiormente al nostro sistema di numerazione.

Saltando all'era cristiana, incontriamo ancora un Nicomaco, che fu detto l'*Aritmetico* per eccellenza, autore di un trattato di aritmetica, che fu per molti secoli commentato dai principali autori di matematica; e più tardi due Teoni, e Pappo, e (4^{o} secolo) Diofanto. Quest' ultimo figura più specialmente nella storia dell'algebra.

334. *Arabi.* Quando le irruzioni barbariche nell'Europa meridionale troncarono il corso alle lettere ed alle scienze, queste trovarono un po' di sosta presso agli Arabi. I Califfi, cultori essi stessi dell'astronomia specialmente e della matematica, favorirono gli scienziati tutti, ed è perciò che troviamo fra questi molti scrittori di aritmetica, tra i quali

piacemi citare Thebit Ben Corrah che scrisse sui numeri poligoni, e fece un compendio dell'aritmetica di Nicomaco; Abi Abdalla Moamad, detto per antonomasia l'*Aritmetico;* Abu Barza il *Calcolatore;* Ebn Syna (il famoso Avicenna). Tra le altre cose dobbiamo agli Arabi la regola di falsa posizione, detta in loro linguaggio *elcatain.*

335. *Risorgimento delle scienze in Europa.* Stando ai risultati delle ricerche del signor Chasles, l'aritmetica nostra e le cifre che adoperiamo sarebbero d'origine italiana. Pitagora colla sua *tavola*, o *mensa*, o *abaco*, che vogliasi dire, avrebbe somministrato non una semplice tavola di moltiplicazione, ma il principio fondamentale del valore di posizione delle cifre, con mancanza però dello zero. A questo medesimo sistema si riferirebbero gli *apici* di Boezio, e le nove cifre dell'abaco di Gerbert, alle quali si sarebbe col tempo aggiunto lo zero, detto *sipos, rota* o *rotula.* Ecco le cifre di Gerbert

I Ƨ Ꮛ ℨ Ꝗ L ᔑ 8 Ⴆ Θ

che dicevansi per ordine *igin, ándras, ormis, arbas, quimas, calcus, zenis, themenias, celentis.* L'ultima è la *rota.*

L'opinione universale però non è d'accordo con Chasles, ammettendosi generalmente l'origine indiana della nostra aritmetica. Leonardo Fibonacci da Pisa, che viaggiò in Barberia, e visitò molti paesi, si ritiene pel primo introduttore della moderna aritmetica in Europa. Egli imparò dagli Arabi, e di ritorno in patria fece conoscere (1202) le cifre arabe e le sue conquiste scientifiche, alle quali cose molto aggiunse del suo, mostrandosi pe' suoi tempi matematico di primo ordine (vedi la storia dell'algebra nel mio *Compendio di algebra elementare*, sesta edizione).

Digitized by Google

Sulle tracce del Fibonacci camminarono in seguito molti scrittori, sebbene a quei tempi di speculazioni commerciali, e di rivolgimenti politici, i cultori dell'aritmetica non fossero tenuti in gran conto. Citerò, tra gli altri, gli italiani Francesco di Donato Michelozzi, Paolo Gherardi, Pietro Strozzi, Giovanni Danti, Antonio Biliotti, Raffaele Canacci, Paolo Dagomari, detto *Paolo dall'Abbaco*, i quali tutti scrissero più o meno di aritmetica. Il Danti fece un trattato sull'algorismo desunto dall'aritmetica di Boezio. Nei libri aritmetici di Dagomari incontransi per la prima volta i numeri di molte cifre divisi con virgole in gruppi di tre cifre l'uno, per facilitarne la lettura. Il Dagomari fu pure il primo che pubblicò in Italia un almanacco, detto allora *Taccuino*.

Tra i primi scrittori di cose aritmetiche citerò ancora Sacrobosco (Holiwoode o Halifax), che nel XIII secolo scrisse una aritmetica in versi latini, che comincia

> Haec Algorithmus, ars praesens, dicitur in qua
> Talibus Indorum fruimur bis quinque figuris,

dai quali versi comprendesi come a que'tempi si riteneva che le cifre fossero d'origine indiana; Giordano da Namur (Belgio) che scrisse l'*Algorithmus demonstratus*, ed un trattato di aritmetica in 12 libri 1480; il monaco Planudio che pubblicò a Costantinopoli la sua aritmetica indiana; e un tale Pellos che stampò a Torino (*Thaurinò* 1492) un Corso d'aritmetica in dialetto nizzardo *Compendion de abaccho*.

Le cifre arabe, o indiane che siano, non ebbero in origine la forma con cui noi le adoperiamo attualmente, e la varietà della forma secondo i varii autori e paesi è pure una prova che presso a poco

nel medesimo tempo fu l'aritmetica degli Arabi trasportata in Europa per differenti vie. La tavola qui unita fa conoscere alcune delle principali forme delle cifre usate da varii in varii tempi (*).

Cifre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	Attuali
Sanscrite. .	१	२	३	४	५	६	७	८	९	०	Avanti C.
Arabe . . .	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	٠	Dopo C.
Persiane . .	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۰	Idem
Fibonacci .	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1202
Sacrobosco.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1230
Planudio. .	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	0	1327

È singolare che nelle cifre arabe lo zero è rappresentato con un punto, ed il 5 con 0. A quei tempi lo zero era detto *cifra*, come attesta Planudio, forse dal greco *tzephera (inanis seu vacuus fuit)*.

336. *Tempi moderni.* La storia de' perfezionamenti ulteriori dell'aritmetica in tempi a noi più vicini va così strettamente unita a quella dell'algebra, che per attenerci puramente alla sola scienza de' numeri ben poche cose essenziali mi rimangono da dire.

(*) Questa tavola è fedelmente estratta da una maggiore che va unita al *Sunto Storico dell'Aritmetica* del colonnello cav. Martines, Messina 1865, dedicato alla gioventù italiana, e cui la gioventù italiana farebbe bene di studiare. Chi poi avesse vaghezza di maggiormente impratichirsi nella storia delle matematiche, potrebbe ricorrere alle opere più estese di Montucla, Libri, Cossali, ecc.

Non parlerò delle ricerche fatte intorno ai quadrati magici, ed altri più giuochi, che studi aritmetici. Solo aggiungerò che i matematici Antonio Cataldi (1580) e Brounker immaginarono le frazioni continue (V. il mio Compendio d'algebra), le cui belle proprietà vennero per la prima volta studiate e fatte conoscere da Ugenio, e più tardi dal torinese Lagrange, il quale ne fece bellissime applicazioni.

Nel 1614 il barone scozzese Napier (Neper) pubblicò la sua bella invenzione de' logaritmi nell'opera che ha per titolo: *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*. La grande comodità, che ci procura l'invenzione napieriana nelle applicazioni numeriche, invogliò i calcolatori di varii paesi alla costruzione di tavole logaritmiche. Quindi nacquero tosto nei primi anni dopo l'invenzione de' logaritmi in Inghilterra le tavole di Briggs, in Italia quelle di Bonaventura Cavalieri, in Germania di Kepler, in Olanda di Vlacq, in Francia dell'inglese Edoardo Vingate.

337. *Macchine calcolatrici*. Non contenti i matematici d'avere assoggettato le operazioni aritmetiche a regole semplicissime, per cui molti possono eseguire calcoli che non intendono, hanno ancora voluto materializzarle a segno da farle eseguire da automi, o macchine meccaniche. Pascal fu forse il primo a comporre una macchina calcolatrice, che formò la maraviglia de' suoi tempi. Napier, l'inventore de' logaritmi, ne immaginò una a bacchette, che fu poi perfezionata da Hélie. Una macchina aritmetica fece pure Leibnizio, ed una che chiamò macchina *palpabile* si costrusse per proprio uso l'inglese Nicola Sauderson, cieco dall'infanzia. Lord Stanhope ne fece una capace di eseguire operazioni assai complicate, e successivamente molti e molti

altri inventarono o vanno immaginando somiglianti congegni che fanno conoscere coi nomi di *macchine calcolatrici*, *bilance aritmetiche*, *bilance algebriche*, *regoli calcolatori*, ecc.

338. *Segni aritmetici.* È molto antico l'uso di dire una lettera dell' alfabeto per esprimere un numero qualunque. Aristotile, Cicerone, ecc., dicevano già α, o β, o γ, per dire una quantità. In tempi a noi più vicini troviamo le lettere sostituite ai numeri da Fra Luca Pacioli, Tartaglia, Cardano, Maurolico, Vieta, ecc., ecc., i quali autori colle loro ricerche crearono si può dire l'algebra.

Leonardo da Vinci ei pure usò lettere per numeri ed immaginò i segni $+$ e $-$ di addizione e sottrazione, che vediamo più tardi adoperati da Cristoforo Rodolfo. Invece del $-$ già Diofanto usava la lettera greca ψ rovesciata e un po' tronca. Ai segni $+$ e $-$ il Rodolfo aggiunse il segno radicale $\sqrt{}$, derivato dalla lettera r, ed al posto del quale il Pacioli e Stefano De la Roche adoperavano la lettera R.

Oughtred fu il primo ad usare il segno $\times$ di moltiplicazione, pel qual fine Cartesio adoperava il punto. I due punti per la divisione furono probabilmente suggeriti dall'idea del semplice punto per la moltiplicazione.

La linea —, o |, come $\frac{1}{2}$, o 1/2 per le frazioni, citata da Tartaglia, pare di un uso commerciale italiano assai vecchio.

Il segno eguale $=$ fu introdotto dall'inglese Roberto Recorde (1552). Cartesio e Wallis, invece di $=$ usavano pure $\|$ e ∞.

Tommaso Harriot (nato nel 1560) ci diede i segni di diseguaglianza $>$ e $<$.

Per accennare che un'operazione va eseguita sopra

Digitized by Google

un intiero polinomio Cartesio soleva porre una linea orizzontale sopra di esso, come facciamo noi ancora pei radicali; Raffaele Bonelli invece (Bologna 1572) chiudeva il polinomio tra due L l'uno contro l'altro così: L ⅃, d' onde nacque probabilmente l'uso delle nostre parentesi ().

Lo stesso Bonelli introdusse l'uso degli esponenti, che sostituì alle denominazioni ed indicazioni assai poco comode prima adoperate di *q* quadrato, *c* cubo, *qq* quadrato-quadrato, *qc* quadrato-cubo, ecc., ecc., e di $a \times a \times a \times a$, oppure $aaaa$, ecc.

Nel secolo XIV i Veneziani cominciarono a fare uso delle frazioni decimali, ma ne scrivevano il denominatore. Le stesse frazioni troviamo un secolo più tardi adoperate da Regiomontano (Muller). Oughtred fu forse il primo a scriverle senza denominatore, il qual merito è da alcuni ascritto all'inventore de' logaritmi, Napier, e da altri al prussiano Pitisco (1612).

APPENDICE

TAVOLE DI RAGGUAGLIO DI PESI E MISURE

Non essendo ancora finito il lavoro della Commissione centrale di pesi e misure del Regno d'Italia per la pubblicazione delle nuove tavole uffiziali, non posso, come era mia intenzione, dare qui per ciò che concerne i pesi e le misure delle italiane città, numeri, di cui si possa dire che le ultime cifre non debbano più in un prossimo avvenire andar soggette a correzione veruna. Tuttavia va-

lendomi dell'aiuto del Segretario di detta Commissione, ho potuto avere a mia disposizione le tavole di ragguaglio, che furono in varie provincie del Regno uffizialmente approvate dal governo italiano, e le tavole del dicastero del Censo romano le quali sono uffiziali per lo Stato del Papa. Quindi posso assicurare che, almeno per ciò che concerne l' Italia, i numeri che seguono hanno valore uffizialmente approvato. Quanto agli altri Stati non posso asserire altrettanto, ma i miei numeri sono ricavati o dall'*Annuaire du Bureau des longitudes*, o dalle dette tavole del Censo romano. Ecco qui la nota dei libri che consultai per rendere le mie tavole possibilmente meno imperfette.

Tavole di ragguaglio della Commissione di pesi e misure per gli stati continentali del Re di Sardegna, Torino 1849; approvate dal Ministero d'Agricoltura e Commercio.

Tavole dei pesi e delle misure dell'isola di Sardegna, 1845; approvate dal viceré.

Tavole di ragguaglio per le provincie lombarde, 1860; approvate dal Governatore di Milano.

Tavole di ragguaglio per le provincie di Parma e Piacenza, 1861; approvate dal Ministero d' Agricoltura e Commercio.

Tavole di Vincenzo Tantini, 1863; approvate dal governo toscano nel 1860.

Tavole di Giovanni Gandolfi, Napoli 1861; compilate per ordine del governo.

Tavole di Angelo Agnello per la Sicilia.

Tavole di G. Baseggio per le monete del Regno d'Italia, Torino 1863; dichiarate uffiziali dal Ministro d'Agricoltura e Commercio.

Tavole di ragguaglio dello Stato Pontificio, pubblicate dal dicastero del Censo, sotto la presidenza del Cardinale Vannicelli Casoni, Roma, vol. 1° 1850, e vol. 2° 1855.

Annuaire du Bureau des longitudes, 1865.

Arithmetical examples by W. A. Browne.

Il decreto originale inglese (29 luglio 1864) coll'unita tavola, con cui si permette in Inghilterra per gli atti pubblici l'uso ufficiale del sistema metrico decimale, e si stabilisce il ragguaglio delle misure metriche colle inglesi.

Misure di lunghezza (*).

	Metri
Acqui. Trabucco: 6 piedi, 12 once, 12 punti, 12 atomi	3·006000
Alessandria (Piemonte). Trabucco: diviso come il precedente	2·861370
Amburgo. Piede: 3 palmi, 4 pollici; . 14 piedi = marsch-ruthe; 16 piedi = gees-ruthe (pertica).	·286415
Amsterdam. Pertica: 13 piedi, 3 palmi, 11 pollici	3·680729
Aosta. Auna: divisa in metà, terzi, ecc.	·827000
Tesa: 6 piedi, 12 pollici, 12 linee . .	1·872000
Augusta. Piede: 12 pollici, 12 linee .	·296168
Bergamo. Braccio mercantile: 12 once .	·659319
Braccio da fabbrica: 12 once	·531414
Piede: 12 once (6 piedi=trab.) . . .	·437767
Berlino. Piede del Reno: 12 poll., 12 lin.	·313854
Miglio	7532
Bologna. Braccio: 12 once	·640039
Piede: 12 once	·380098
Brescia. Braccio da panno: 12 once .	·674124
Braccio da seta e da tela: 12 once . .	·640383
Piede: 12 once	·475467
Cagliari. Trabucco o canna: 12 palmi, 4 quarte	3·148200

(*) In tutta la tavola invece di dire che una misura si divide in tante altre, ed una di queste in tante altre ancora, e così di seguito, si dice abbreviato come in questo esempio: Piede: 12 once, 12 punti, 12 atomi, e vuol dire: un piede si divide in 12 once, un'oncia in 12 punti, un punto in 12 atomi.

	Metri
Misure tollerate: canna=3 metri, e palmo $=\frac{1}{4}$ di metro	
Carrara. Canna per legname: 12 once	·624545
Braccio mercantile: 12 once	·619725
Palmo pe' marmi: 12 once	·249267
Braccio da fabbrica: 12 once	·293337
Casale. Trab. di Monferrato: 6 piedi, 12 once	2·904126
Tesa di Monferrato: 5 piedi manuali, 8 once	1·675000
Braccio lungo da panno: metà, terzi, ecc.	·670000
Braccio corto o braccetto da seta	·526000
Cesena. Braccio da tela: 12 once	·702356
Piede: 10 once	·538473
Ciambery e **Savoia**. Piede di camera o di Savoia: 12 pollici, 12 linee	·339370
Auna di mercante, o antica di Ginevra	1·142000
Auna metrica	1·200000
Auna di Tisserand	1·268000
Colonia. Piede: 12 pollici, 12 linee	·287393
Como. Piede: 12 once	·451219
Costantinopoli. Pic, halebi o archim	·677877
Pic corto	·574109
Cracovia. Piede	·356421
Crema. Braccio: 12 once	·670164
Piede da legname: 12 once	·469786
Cremona. Piede: 12 once	·483539
Dresda. Piede: 12 pollici, 12 lin.	·283260
Ferrara. Braccio da panno: 12 once	·673607
Braccio da seta: 12 once	·634358
Piede: 12 once	·403854
Firenze e **Toscana**. Braccio: 20 soldi, 3 quattrini, 4 denari	·583626
Canna = 5 braccia; crazia = 5 quattrini; miglio=2833 braccia e un terzo	1653 607
Forlì. Braccio da panno e da seta: 12 once	·621963
Braccio da tela nostrale: 12 once	·737301
Piede: 10 once	·488206

Digitized by Google

	Metri
Francoforte sul Meno. Piede: 12 once	·284610
Genova. Cannella: 12 palmi, 12 once, 12 punti, 12 atomi	2·977000
Canna per le stoffe: 10 palmi	2·480833
Grecia Antica; sistema olimpico (Attica, Peloponneso, Sicilia, Magna Grecia). Piede greco ant. di 600 allo stadio olimp.	·308604
Palmo *minor* (doron o paleste) = ·25 di pie.; palmo *maior* (epitame) = ·75 di pie.;	
Dito (dactilos)	·019291
Cubito (pecus, sive olene) = 1·5 piedi.	
Sistema phytico o delphico (Tessaglia, Illiria, Tracia, Marsiglia, Macedonia, Sicilia). Piede phytico di 600 allo stadio phytico	·247650
Palmo = ·25 di piede; dito = ·25 di palmo; cubito = 1·5 piedi.	
Piede di Macedonia	·353500
Piede di Archimede di 600 allo stadio di Cleomede	·222222
Imola. Braccio: 12 once	·639350
Piede: 10 once	·439661
Intra. Braccio da panno: 12 once . . .	·667410
Braccio da seta: 12 once	·525475
Lipsia. Piede: 12 once, 12 linee . . .	·282656
Lisbona. Palmo di Craveira: 8 pollici .	·218590
Piede di Craveira: 12 pollici	·327800
Braça = 10 palmi; vara = 5 palmi	
Londra. Piede: 12 pollici, 12 linee . .	·304794
Yard = 3 piedi; tesa o fathom = 6 piedi; rod o pole = 5 yards e mezzo; furlong = 40 poles	
Miglio = 8 furlongs = 1760 yards . . .	1609·315
Lega = 3 miglia.	
Madrid. Estadale: 2 estado, 6 piedi . .	3·344632
Passo = 5 piedi; gran palmo = 1 $\frac{1}{3}$ piede	

	Metri
Lega = 20 mila piedi	5574
Mantova. Braccio: 12 once	·637973
Piede da legname: 12 once	·466860
Massa di Carrara. Braccio: 12 once	·592871
Piede da legname: 12 once	·495780
Milano. Braccio: 12 once	·594936
Trabucco: 6 piedi, 12 once, 12 punti, 12 at.	2·611110
Mirandola. Braccio da stoffa: 12 once	·638490
Braccio da legname: 12 once	·531931
Modena. Braccio da stoffa: 12 once	·633153
Braccio da legname: 12 once	·523048
Monaco di Baviera. Ruthe o pertica: 10 piedi, 12 pollici, 12 linee, 12 punti	2·918590
Napoli, prima del 1840. Palmo: 12 once, 5 minuti	·263670
Canna = 8 palmi.	
Dopo il 1840: Palmo, vale la settemillesima parte della lunghezza dell'arco di 1′ del meridiano terrestre, e dividesi in decimi, centesimi, ecc.	·264550
Canna = 10 palmi	
Miglio = 7000 palmi	1851·852
Nizza Marittima. Trabucco: 12 palmi, 12 pollici	3·144000
Canna = 8 palmi	
Auna antica di Francia	1·188400
Auna metrica	1·200000
Nizza Monferrato. Trabucco: 6 piedi, 12 once, 12 punti, 12 atomi	2·916692
Novara. Trabucco: 6 piedi, 12 on., 12 punti	2·825680
Oneglia. Canna: 12 palmi, 12 once, 12 linee, 12 punti	2·988000
Ossola. Spazzo: 8 ottavi, 5 once	1·983120
Palermo e **Sicilia**, misure vecchie. Palmo	·258098
Miglio = 5760 palmi	1486·643
Dopo il 1840 come a Napoli.	

Digitized by Google

	Metri
Parigi. Tesa: 6 piedi, 12 poll., 12 linee, 12 punti	1·949037
Lega di 4 chilometri	4000
Lega marina di 20 al grado	5556
Lega di posta di 2000 tese	3898
Parma. Braccio da panno e da tela	·639500
Braccio da seta	·587750
Pertica: 6 braccia da muro, 12 once, 12 punti, 12 atomi	3·271000
Pavia. Trabucco: 6 piedi, 12 once, 12 punti, 12 atomi	2·831724
Braccio=16 once	·629272
Pechino. Piede matematico legale	·333100
Piede o Congbu de' costruttori	·322800
Piede degli ingegneri	·329600
Li	577
Piacenza. Braccio da stoffe	·675000
Canna: 2 trabucchi, 6 braccia da muro, 12 once, 12 punti, 12 atomi	5·634783
Pietroburgo. Sacken o tesa: 3 braccia o archines, 16 palmi o werschocks	2·133561
Werst=500 sacken	1067
Pontremoli. Braccio da panno: 8 ottavi	·692000
Braccio da muratore: 12 once	·551000
Ravenna. Braccio mercantile: 12 once	·643138
Braccio da legname: 12 once	·347563
Piede da fabbrica: 10 once	·584608
Reggio Emilia. Braccio mercant.: 12 once	·641072
Braccio da legname: 12 once	·530898
Reno (piede del) *vedi* Berlino	
Rimini. Braccio mercantile: 12 once	·631432
Piede: 10 once	·542948
Roma. Palmo: 12 once, 5 minuti	·223422
Canna=10 palmi; staiolo=5·75 palmi.	
Piede = quattro terzi del palmo	·297896
Passo=5 piedi.	

Digitized by Google

	Metri
Miglio = 1000 passi	1489·48
Roma antica. Piede del Campidoglio: 12 once	·296318
Stadio olimpico = 625 piedi.	
Passo *maior* = 5 piedi; passo *minor* o *gressus* = 2·5 piedi; 16 diti = piede; palmo *minor* = 4 diti; palmo *maior* = 12 diti; cubito = 1·5 piedi; pert. (decempeda) = 10 piedi; *actus* = 120 piedi.	
Rovigo. Braccio da panno: 12 once . .	·669820
Braccio da seta: 12 once	·632809
Piede: 12 once	·384230
Sassari. Canna: 10 palmi	2·623500
Savona. Cannella: 12 palmi, 12 once .	3·000000
Sondrio. Braccio da panno: 12 once .	·671714
Braccio da seta: 12 once	·530554
Piede: 12 once	·446202
Stoccolma. Pertica: 16 piedi, 12 pollici, 12 linee	4·750416
Torino, avanti il 1818. Trabucco: 6 piedi, 12 once, 12 punti, 12 atomi . . .	3·082596
Raso = 14 once	·599394
Tesa: 5 piedi manuali, 8 once, 12 punti, 12 atomi	1·712553
Piede legale di 10 once e 10 punti del piede, ora fuori di uso	·463817
Miglio = 800 trabucchi	2466·077
Dopo il 1818.	
Trabucco: 6 piedi, 12 once, 12 punti, 12 atomi	3·086420
Il piede di questo trabucco è la lunghezza dell'arco di 1''' del meridiano terrestre.	
Raso = 14 once	·600137
Tesa: 5 piedi manuali, 8 once, ecc. .	1·714678
Piede leg. di 10 on. e 10 punti (fuori d'uso)	·464392
Miglio = 800 trabucchi	2469·136

	Metri
Tortona. Trabucco: 6 piedi, 12 once .	2·853000
Valcamonica. Braccio da panno: 12 once	·682559
Varallo. Braccio lungo	·682000
Braccio corto	·350000
Varsavia. Piede	·283000
Venezia. Piede: 12 once, 12 punti, 12 atomi	·347735
Passo=5 piedi; pert. piccola=4·5 piedi; pertica grande=6 piedi.	
Verona. Braccio lungo: 12 once . . .	·648991
Braccio corto: 12 once	·642449
Piede: 12 once	·342915
Vienna. Braccio (elle): 12 once . . .	·779213
Klafter: 6 piedi, 12 once	1·896666
Miglio	7586
Vigevano. Braccio da panno: 12 once .	·668099
Braccio da seta: 12 once	·528144
Braccio da legname: 12 once	·599068
Piede 12 once.	·462381

Misure di superficie agrarie.

	Ari
Acqui. Tavola=4 trabucchi quadrati .	·361441
Staro=28 tavole.	
Alessandria (Piemonte). Tavola: 12 piedi, 12 once, 12 punti, 12 atomi . . .	·327498
Staio piccolo=12 tavole; staio grande=18 tavole; moggio=8 staia.	
Amburgo. Scheffel	44·98
Morgen di 600 marschruthen quad. . .	96·472
Morgen di 200 geesruthen quad. . . .	82·58
Amsterdam. Morgen di 600 pertiche quad.	81·2865
Aosta. Séteur: 8 quartanées, 100 tese quad.	28·035072
Aquila degli Abruzzi. Coppa . . .	6·17973
Avellino. Moggio	40·04465

	Ari
Bergamo. Pertica: 24 tavole	6·623082
Berlino. Morgen grande: 400 ruthen quad.	55·256
Morgen piccolo: 180 ruthen quad. . .	25·532
Bologna. Tornatura: 144 tavole . . .	20·804358
Brescia. Piò: 100 tavole	32·553938
Cagliari. Starello: 16 imbuti	39·86750
È tollerato lo starello di 40 ari.	
Campobasso. Tomolo	23·36691
Carrara. Quartiere: 100 tavole . . .	12·390686
Casale. Moggio: 8 staia, 12 tav., 12 piedi	32·386366
Catanzaro. Tomolata	27·80878
Cesena. Tornatura: 100 tavole . . .	28·995272
Chieti. Salma: 3 tomoli	97·30850
Ciambery. Journal: 400 tese quad. (la tesa quad. è un quad. di 8 p. di cam. di lato)	29·4838
Colonia. Morgen di 150 pertiche quad. .	31·71626
Como. Pertica: 24 tavole	7·036367
Cosenza. Moggio	40·04465
Crema. Pertica: 24 tavole	7·627364
Cremona. Pertica: 24 tavole	8·080469
Dresda. Morgen di 300 pertiche quad. .	55·3697
Ferrara. Biolca: 400 pertiche o tavole .	65·239360
Staro: 66 pertiche e due terzi . . .	10·873227
Firenze. Quadrato: 10 tavole, 10 pertiche, 10 deche, 10 braccia quadrate . .	34·061912
Foggia. Tomolo: 3 pezze, 3 catene . .	30·65930
Forlì. Tornatura: 100 tavole	23·834505
Francoforte sul Meno. Morgen di 160 p. q.	20·2506
Genova. Cannella quadrata: 12 palmi superficiali, 12 oncie superficiali . . .	·088625
Grecia antica. Stadio quad.: 36 pletri, 10000 piedi quadrati	342·94
Imola. Tornatura: 100 tavole	19·330161
Lecce. Tomolo	62·56976
Londra. Rood: 40 poles o pertiche quadr., 272 ¼ piedi quadrati	10·116775

	Ari
Acre = 4 roods; hide of land = 100 acres.	
Madrid. Yugada: 50 fanegadas . . .	3219·7815
Arançada	44·7192
Mantova. Biolca: 100 tavole	31·385969
Massa di Carrara. Staro: 49 tavole .	12·044110
Milano. Pertica: 24 tavole	6·545179
Mirandola. Biolca: 72 tavole	29·336320
Modena. Biolca: 72 tavole	28·364724
Monaco (Baviera) Juchart di 400 pert. quad.	34·0726
Napoli, prima del 1840. Moggio: 48400 palmi quadrati	33·64863
Dopo il 1840. Moggio: 100 canne quad.	6·998684
Nizza Marittima. Starata: 2 eminate, 8 moturali	15·444900
Nizza Monferrato. Moggio: 8 staia, 12 tavole	32·6672
Novara. Moggio: 4 pertiche, 24 tavole, 12 gettate	30·6603
Oneglia. Cannella quad. di 144 palmi quadrati	·089281
Ossola. Staro: 400 spazza	15·7311
Palermo e **Sicilia**, misura vecchia. Canna quadrata o quartiglio	·042633
Dopo il 1840 come a Napoli.	–
Parigi. Arpent des eaux et forêts: 100 pertiche	51·0720
Arpent de Paris: 100 pertiche .	34·1887
Parma. Biolca: 6 staia, 12 tav., 12 p.	30·81439
Pavia. Pertica: 24 tavole	7·697918
Piacenza. Pertica: 24 tav., 12 p. o brac.	7·620186
Pietroburgo. Dessâtina di 3200 sacken quadrati pei terreni seminativi . . .	145·6667
Dessâtina di 2400 sacken quadrati (boschi e campi)	109·2500
Potenza. Tomolo	22·02456
Ravenna. Tornatura: 100 tavole . . .	34·176615

	Ari
Reggio (Emilia). Biolca: 72 tavole . . .	29·222503
Reggio (Calabria). Quattronata	12·11351
Rimini. Tornatura: 100 tavole. . . .	29·479293
Roma. Rubbio: 4 quarte, 4 scorzi, 4 quartucci, 175 staioli	184·8438
Per le vigne. Pezza: 4 quarte, 40 ordini, 10 staioli	26·4063
Roma antica. Saltus: 4 centurie, 100 hæredia, 2 jugeri, 2 actus quad. o acnua, 4 clima, 6 actus minimus, 6 decempeda, 100 piedi quad.	20227·16
Rovigo. Campo: 840 tavole.	44·644077
Salerno. Moggio.	36·77712
Sassari. Rasiere: 7 starelli, 8 imbuti .	139·53625
Savona. Cannella quadrata	·09
Sondrio. Pertica: 24 tavole	6·880776
Stoccolma. Tonneland di 218 $\frac{3}{4}$ pert. quad.	49·3640
Teramo. Tomolata	40·04465
Torino, prima del 1818. Giornata: 100 tav., 12 piedi, 12 oncie, 12 punti, 12 at.	38·009599
Dopo il 1818. Idem	38·103948
Varsavia. Morgen	55·9870
Venezia. Campo: 4 quarte, 210 tavole .	36·566063
Verona. Campo: 720 tavole	30·479466
Vienna. Jugero: 1600 klafter quadrati .	57·557405
Vigevano. Pertica: 24 tavole	7·388894

Misure di capacità.

NB. La prima misura per ciascuna città riguarda gli aridi, la seconda i liquidi, purchè non vi sia dichiarazione in contrario.

	Ettolitri
Acqui. Sacco: 8 staia, 16 coppi . . .	1·293064
Alessandria (Piem.). Salma: 12 st., 16 cop.	2·132586
Brenta: 34 pinte	·578394

Digitized by Google

	Ettolitri
Amburgo. Last: 3 wispel, 10 scheffels .	31·5888
Fuder: 6 ahms, 4 ankers	8·68716
Amsterdam. Last: 27 muddes, 4 scheepels	30·03912
Aam: 4 anckern, 2 steck-kannen. . .	1·55224
Aquila degli Abruzzi. Barile: 60 caraffe (vino)	·38573
Augusta. Schaf: 8 metzen, 4 vierlinge .	2·05267
Fuder: 8 jez, 2 muids, 48 maas . .	11·35872
Bergamo. Soma: 8 staia, 4 quartari .	1·712812
Brenta: 108 boccali	·706905
Berlino. Scheffel: 16 metzen, 3 viertels	·54961
Eimer: 2 ankers, 30 viertels	·68690
Bologna. Corba: 2 staia, 8 quartiroli .	·786448
Corba: 60 boccali	·785931
Brescia. Soma: 12 quarte, 4 coppi . .	1·459200
Zerla: 72 boccali.	·497427
Cagliari. Starello: 16 imbuti	·505000
Botte: 10 quartare, 8 mezze mezzette (vino)	·448400
Barile: 8 quartane, 24 misure (olio) .	·336352
Tollerato starello = botte = 50 litri.	
Campobasso. Barile di $45\frac{1}{2}$ caraffe (vino)	·40627
Carrara. Sacco: 3 secchie, 8 quarrette .	·725476
Barile: 32 boccali	·429986
Casale. Sacco: 8 staia, 16 coppi . . .	1·293064
Brenta: 45 pinte, 2 boccali	·732105
Catanzaro. Salma: 120 caraffe (vino) .	1·07147
Cesena. Sacco: 4 quartarole, 5 bernarde	1·381773
Soma: 54 boccali	·639272
Chieti. Come Aquila	
Ciambery. Veissel: 4 quartans, 4 mouduriers (pel frumento)	·8126
Pot de vin (pel vino)	·01858
Colonia. Last: 20 malter, 8 fässer . .	32·4146
Ohm: 26 viertels, 4 mass, 4 pinten. .	1·55755
Como. Moggio: 8 staia, 4 quartari . .	1·508661
Brenta: 96 boccali	·898062

	Ettolitri
Copenaga. Toende: 8 skieps, 18 pots	1·39084
Ancker: 10 stubgen	·37646
Cosenza. Barile: 22 cannate (vino)	·28287
Costantinopoli. Fortin: 4 killow	1·32592
Almud o meter (olio)	·052270
Crema. Soma: 16 staia, 2 emine	1·754811
Brenta: 64 boccali	·485346
Cremona. Sacco: 3 staia, 4 quartari	1·069338
Brenta: 75 boccali	·474655
Dresda. Wiespel: 2 malters, 12 scheffeln	25·38912
Fuder: 12 eimers	8·0916
Fass: 420 kannen (birra)	3·933451
Ferrara. Moggio: 20 staia, 4 quarte	6·218584
Mastello: 40 boccali	·567842
Firenze. Moggio: 8 sacca, 3 staia, 4 quarti, 8 mezzette, 2 quartucci	5·847087
Barile da vino: 20 fias., 4 mezz^e^, 2 quartucci	·455840
Barile da olio: 16 fiaschi divisi come sopra. Soma = 2 barili.	·334289
Foggia. Barile: 40 caraffe (vino)	·30001
Forlì. Staio: 16 provende, 2 mezzine	·721622
Soma: 42 boccali	·711277
Francoforte sul Meno. Achtel o malter: 4 simmern, 2 metzen, 2 sechtern	1·07984
Stück: 1 $\frac{1}{4}$ füdern, 6 ohmen, 20 vierteln.	10·75725
Genova. Mina: 4 st., 2 quarte, 12 gombette	1·165318
Mezzarola: 3 terzaruoli, 60 amole (vino).	1·590000
Quarterone: 6 misurette (olio).	·005116
Grecia antica. Medimno o achana: 3 tritos, 2 hectos, 2 emiecton, 4 choenix, 2 xestes, 2 cotyles, 4 oxibaphon, 1·5 cyathos, 10 cochliarion	·520246
Amphora = ·5 di medimno.	
Metrete (liquidi): 2 diote, 6 chous, 6 xestes, 2 cotyles, 2 tetarton, 3 cyathos, 2 conchœ, 2 mystron	·390184

Digitized by Google

	Ettolitri
Imola. Corba: 2 staia, 4 quartaroli . .	·688686
Corba: 60 boccali	·746758
Lipsia. Scheffel	1·38969
Eimer: 54 visir kannen	·75852
Lisbona. Moyo: 15 fanegas, 4 alquieres, 4 quartos	8·139495
Tonelada: 2 pipas, 26 almudes, 2 alquieres, 6 canhadas, 6 quartilhos	8·60132
Lodi. Sacco: 8 staia, 4 quartari . . .	1·589566
Brenta: 80 boccali	·662030
Londra (misura imperiale). Bushel: 4 pecks, 2 gallons, 2 pottles, 2 quarts, 2 pints	·363477

Sack=3 bushels; quarter=8 bushels; load =5 quarters; last=2 load; chaldron (vecchia misura di carbone)=12 sacks. Ora legalmente il carbone deve vendersi a peso. Il gallon imperiale corrisponde a 277·273844 pollici cubi, ed un gallon d'acqua distillata alla temperatura di 62° Fahrenheit pesa 10 libbre avoirdupoids. Il bushel in uso anteriormente all'imperiale era detto di Winchester: 32 bushels di Winchester fanno quasi esattamente 31 imperiali.

Un gallon vale litri 4·543458.

Pei liquidi il gallon si divide come sopra, ed i suoi moltipli per la birra sono: firkin=9 gallons; kilderkin=2 firkins; barrel=2 kilderkins; hogshead=3 kilderkins; butt=2 hogsh.; tun=2 butts.

Pel vino i moltipli del gallon sono: tierce=42 gallons; hogshead=63 gallons; puncheon=84 gallons; pipe=3 tierces; tun=2 pipes.

	Ettolitri
Madrid. Cahiz: 12 fanegas, 12 calemines, 4 cuartillos	66·700800
Moyo: 16 arrobes, 8 azumbres	2·58176
Mantova. Sacco: 3 staia, 4 quarti . .	1·038155
Soglio: 60 boccali	·546818
Massa-Carrara. Sacco: 3 st., 4 quarre	·755079
Barile: 32 boccali	·436180
Milano. Moggio: 8 staia, 4 quartari . .	1·462343
Brenta: 96 boccali	·755544
Mirandola. Quartaro: 60 boccali (liquidi)	1·038509
Modena. Sacco: 2 staia, 8 quarte . .	1·265004
Quartaro: 90 boccali	1·018117
Monaco (Baviera). Scheffel (nuovo): 6 metzen, 2 vierteln, 4 maesseln . . .	3·62622
Eimer: 64 mässe, 4 quarteln	·68416
Napoli, prima del 1840. Tomolo: 24 misure	·553189
Barile: 60 caraffe	·436738
Dopo il 1840. Tomolo (aridi), vale 3 palmi cubi e le divisioni sono in decimali; ma nella vendita al minuto dividesi in 2 mezzette, o in 4 quarti, o in 24 misure	·555451
Barile: vale un cilindro di un palmo di diametro e 3 di altezza; dividesi in decimali, ma in commercio si usa dividerlo in 60 caraffe	·436250
12 barili=botte	
L'olio, giusta la legge del 1840 dovrebbe misurarsi a peso, ma in pratica si misura a volume, cioè al minuto a staia di 96 misurelli, ed a salma di 16 staia all'ingrosso, ragguagliando ogni staio a rotoli $10\frac{1}{3}$, ed ogni salma a rotoli $165\frac{1}{3}$.	
Nizza Marittima. Carica: 4 staia, 2 emine	1·617500
Carica o salmata: 120 pinte	·943500
Novara. Sacco: 8 emine, 16 coppi . .	1·264729
Brenta: 72 boccali	·546797

	Ettolitri
Oneglia. Mina: 3 staia, 2 minette, 2 quarte	1·200000
Per le olive: gombata di 3 staia . . .	1·980000
Salmata: 2 barili, 48 pinte	·960000
Ossola. Staio: 2 emine, 4 quarte . . .	·324962
Brenta: 48 boccali	·539912
Palermo e **Sicilia**, vecchie misure: palmo cubo per gli aridi detto tumulo, e pei liquidi quartara	·171930
Dopo il 1840 come Napoli.	
Parigi. Muid: 12 sétiers, 2 mines, 2 minots, 3 Boisseaux, 16 litrons . . .	18·73190
Muid: 2 feuillets, 2 quartaux, 9 sétiers, 4 quarts, 2 pintes, 2 chopines . . .	2.68220
Parma. Staio: 2 mine, 8 quartarole . .	·470400
Staio per la calce	·48940
Staio pel carbone	·48880
Brenta: 36 pinte, 2 boccali	·716720
Pavia. Sacco: 6 emine, 2 quartari . .	1·222633
Brenta: 96 boccali	·714427
Piacenza. Staio: 2 mine, 8 coppelli .	·34820
Veggiola: 10 brente, 48 pinte . . .	7·577117
Pietroburgo. Tschetwert: 2 osmine, 2 payocs, 2 tschetwerik, 2 tschetwerkas	2·097430
Oxhoft: 6 ankers, 2 stekars	2·212110
Fass (mastello): 400 stoof.	4·91560
Pipa (Botte): 360 stoof	4·42404
Aam: 120 stoof	1·47468
Pontremoli. Quartaro: 12 quarrette .	·220200
Barile: 36 boccali	·324000
Quarterone (olio)	·00490
Potenza. Barile: 40 pinte (vino) . .	·35718
Ravenna. Rubbio: 5 staia	2·875454
Barile: 40 boccali	·537713
Reggio (Calabria). Salma: 100 quart. (vino)	1·07147
Reggio (Emilia). Sacco: 2 staia . . .	1·194911
Brenta: 60 boccali	·758981

	Ettolitri
Rimini. Staio: 4 quarti, 3 bernarde . .	1:876332
Soma: 64 boccali	·761320
Roma. Rubbio: 4 quarte, 4 starelli . .	2·944651
22 scorzi = rubbio; scorzo = 4 quartucci.	
Botte: 16 barili, 4 quartiroli, 8 boccali, 4 fogliette	9·334655
Soma = 2 barili.	
Roma antica. *Demensum*: 4 modii, 2 semodii, 8 sextarii, 2 emine o cothyli, 6 cyathi, 2 conche, 2 ligule o cochlear	·346831
Amphora = 3 modii; medimno = 6 modii.	
Culeus, o dolium: 20 amphore o quadrantali, 2 urne, 4 congii, 2 sextarii castrensi, 2 sextarii ordinari, 2 emine o cotili, 2 quartari, 2 acetabuli, 1·5 ciati, 2 conche, 2 ligule o cocleari . . .	5·202459
Rovigo. Sacco: 3 staia, 4 quarte . . .	·994393
Mastello: 108 bozze	1·047902
Salerno. Barile: 60 caraffe (vino) . .	·41966
Sassari. Rasiere: 7 starelli, 2 corbule, 4 imbuti	1·767500
Botte: 10 quartare (vino). Come Cagliari	·448400
Barile: 8 quartane, 24 misure (olio). Id.	·336352
Savona. Mezzaruola: 4 barili (vino) . .	1·600000
Barile: 240 quarteroni (ôlio)	·654800
Sondrio. Soma: 8 quartari, 4 emine .	1·462343
Soma: 120 boccali	1·305610
Stoccolma. Tunna: 2 spannen, 4 fierding.	1·464900
Tunna: 48 kannen, 2 stoofs	1·25531
Teramo. Barile: 60 caraffe (vino) . .	·43625
Torino, prima del 1818. Sacco: 5 emine, 8 coppi	1·150278
Brenta: 36 pinte, 2 boccali	·492847
Dopo il 1818.	
Sacco: 5 emine, 8 coppi	1·152749
Brenta: 36 pinte, 2 boccali	·493069

	Ettolitri
Tortona. Sacco: 6 em. o staia, 16 coppelli	1·320000
Brenta: 48 pinte, 2 boccali	·848623
Varsavia. Last: 60 korezes	30·6829
Oxhost: 60 garniecs	·95820
Venezia. Moggio: 8 mezzeni, 8 quartucci	3·332688
Botte: 10 mastelli, 7 secchie, 4 bozze .	6·51690
Anfora=8 mastelli	6·009352
Verona. Sacco: 3 minali, 4 quarte . .	1·146535
Brenta: 72 inghistare	·705111
Vienna. Metzen: 16 mässeln	·615045
Fass: 10 eimern	5·668196
Vigevano. Sacco: 6 staia, 4 quartari .	1·144875

Pesi

	Chilogrammi
Amburgo. Pfund: 2 marck, 8 unzen .	·484384
Amsterdam. Pfund: 16 unzen . . .	·49409
Aosta. Rubbo: 25 libbre, 12 once, 8 ottavi	9·615000
Augusta. Pfund: 32 lothe piccoli . . .	·472657
Pfund: 32 lothe grandi	·491112
Bergamo. Libbra: 12 once	·325129
Libbra: 30 once	·812822
Berlino. Pfund: 2 marck, 16 lothe . .	·467624
Pfund (medicinali)	·312
Bologna. Libbra mercantile: 12 once .	·361851
Brescia. Libbra: 12 once	·320812
Cagliari. Cantaro: 100 libbre, 12 once .	40·65631
Lib. da orefice: 12 on., 16 argenti, 36 gr.	·325250
Misura (carbone)	65·050
Colpo (calce)=10 cantari	
Misure tollerate: Cantaro=40 chilogrammi	
Carrara. Libbra: 12 once	·324997
Casale. Rubbo: 25 libbre, 12 once, 8 ottavi	8·134500
Cesena. Libbra: 12 once	·329724
Ciambery. Libbra: 16 once, 8 gros .	·41861
Quintale=100 libbre.	

Chilogrammi

Colonia. Pfund: 2 marck, 8 unzen . . ·467539
Como. Libbra: 12 once . . . . ·316662
Libbra: 30 once . . . . ·791655
Costantinopoli. Oka: 4 cheki, 100 dram. 1·284825
Teffe=610 dr.; quint.=44 oke=100 rot.
Cracovia. Pfund: 2 mark, 16 lothe . . ·40495
Crema. Libbra: 12 once . . . . . . ·325474
Cremona. Libbra: 12 once . . . . ·309489
Dresda. Pfund: 32 lothe, 4 drachmen . ·467147
Ferrara. Libbra: 12 once . . . . . ·345137
Firenze. Lib.: 12 once, 24 den., 24 gr. ·339542
Forlì. Libbra: 12 once . . . . ·329441
Francoforte sul Meno. Quintale: 100 pfunde, 2 mark, 16 lothe . . . . 50·5296
Genova, peso grosso. Cantaro: 6 rubbi, 25 libbre, 12 once, 144 carati, 4 grani 47·6496
Peso piccolo. Rubbo: 25 libbre, 12 once 7·91875
Pesata (per le legna nel porto)= 4 cantari grossi.
Idem per la provincia =5 cantari grossi
Grecia antica. Medimno . . . . . . 39·018
Metrete . . . . 29·264
Le suddivisioni e i nomi come nelle misure di capacità.
Imola. Libbra: 12 once . . . . . . ·362583
Lipsia. Pfund: 2 mark, 8 unzen . . . ·466891
Lisbona. Quintal: 4 arrobas, 32 arrateles o libbre, 2 marcos, 2 quartas, 2 onças, 8 otavas o drachmas, 3 scrupoles . . 58·741888
Londra; peso avoirdupoids. Pound o lib.: 16 once, 16 drachms, 27 $\frac{11}{32}$ grani . . ·453593
Libbra = 7000 grani; quarter=28 libb.; Hundred weight (cwt.) o quintale = 4 quarters; ton = 20 (cwt.)
Peso Troy. Libbra: 12 once, 20 pennyweights, 24 grani . . . . ·373242

	Chilogrammi
Madrid. Quintale: 4 arrobas, 25 libras, 4 panillas, 4 onças	46·0096
Mantova. Libbra: 12 once	·310529
Milano. Libbra: 12 once, 8 ottavi . .	·326793
Libbra: 28 once, 8 ottavi	·762517
Marco: 8 once, 24 denari, 24 grani .	·234997
Libbra di marco = 12 once di marco .	·352495
Modena. Libbra: 12 once	·340457
Monaco (Baviera). Quintale: 100 pfunde, 16 unzen	56·0000
Napoli, dopo il 1840. Cantaro: 100 rotoli, 1000 trappesi; dividesi anche in parti decimali	89·099722
Il rotolo è la $\frac{1}{20{\cdot}376}$ parte del peso di un palmo cubo d'acqua distillata alla temperatura di 16° ·144 centesimali alla pressione di 76 centim.	
Nizza Marittima. Quintale: 6 rubbi, 25 libbre, 12 once, 8 ottavi, 3 denari, 24 grani.	46·7443
Novara. Libbra grossa: 28 once, 24 den.	·759439
Libbra piccola: 12 onc.	·325474
Oneglia. Cantaro: 6 rubbi, 25 lib. . .	47·1840
Palermo e **Sicilia**, vecchie mis., Rotolo.	·793420
Libbra	·317368
Dopo il 1840, come Napoli.	
Parigi. Libbra: 2 marchi, 8 once, 8 grossi, 3 scrupoli, 24 grani	·489506
Tonnellata=2000 lib.; millier=1000 lib.; quintale=100 lib.	
Parma. Peso: 25 lib., 12 on., 24 den. .	8·200000
Pavia. Libbra grossa: 28 once, 24 den.	·743692
Libbra piccola: 12 once	·318725
Pechino. Pecul: 100 catty, 16 tails o lyang	60·0399
Piacenza. Peso o rubbo: 25 lib., 12 on., 24 den.	7·937933

Chilogrammi

Pietroburgo. Berckowetz (tonnellata) : 10 poude, 40 founte, 32 lothe . . . 162·8000
Pontremoli. Peso: 25 lib. 12 on., 24 den. 8·333350
Ravenna. Libbra: 12 once . . . . ·347832
Reggio (Emilia). Libbra : 12 once . . ·324524
Rimini. Libbra : 12 once . . . . . ·345516
Roma. Migliaio: 10 quintali, 100 libbre, 12 once, 8 ott., 3 den, 24 grani . 339·07185
Roma antica. Demensum . . . . . 26·012
Culeus . . . . 390·184
Suddivisioni e nomi come per le misure di capacità.
Rovigo. Libbra sottile: 12 once . . . ·301416
Libbra grossa: 12 once . . . . . ·477294
Sassari, come Cagliari.
Savona. Peso piccolo di Genova. Cantara =6 rubbi.
Sondrio. Libbra : 30 once . . . . . ·797882
Stoccolma. Skolpund: 2 marc, 16 lode, 4 gros . . . . ·425082
Sten=32 skolpunde; centner=120 skolpunde; wagg=155 skolpunde; skippund=400 skolpunde.
Torino. av. il 1818; Rubb.: 25 lib., 12 on., 8 ott., 3 den., 24 grani, 24 granotti. 9·221113
Idem, dopo il 1818 . . . . 9·221995
Marco: 8 onc., 24 den., 24 grani, 24 granotti (avanti il 1818) . . . . ·245896
Idem (dopo il 1818) . . . . ·245920
Carato di 4 grani (materie preziose) prima del 1818 valeva grammi ·213451, dopo ·213472.
NB. Nel sistema di misure torinesi, la relazione tra le misure lineari, la brenta, l'emina ed il rubbo è stabilita nel seguente modo: 64 once cube

	Chilogrammi
d' acqua distillata a 4 gradi centesimali pesano 164 once ; una brenta d' acqua pesa 1604 once; un'emina d'acqua pesa 750 once. Di qui deducesi che la brenta vale 625·951 once cube, e l'emina 292·683.	
Tortona. Rubbo: 25 lib., 12 on., 24 den.	8·14125
Varsavia. Pfund (piccolo): 16 unzen, 2 lothe.	·377866
Venezia. Libb. grossa: 12 on., 8 dramme.	·476998
Libbra sottile : 12 once	·301230
Verona. Libbra : 12 once	·333176
Libbra grossa: 12 once	·499762
Vienna. Libbra : 30 once	·560012
Marca	6·280644

Pesi medicinali differenti in Italia.

I seguenti numeri sono ricavati da un progetto di tavole dei pesi medicinali italiani della Commissione centrale di pesi e misure. Le città non nominate non hanno pesi proprii, ma fanno uso ognuna di alcuno dei pesi qui notati.

Città	Valore della libb. med. in chil.
Ancona	·339072
Bergamo	·325129
Bologna	·325665
Breno	·317999
Brescia	·320812
Cagliari	·307400
Caselle Landi	·316540
Cesena	·325670
Crema	·325474
Cremona	·309489
Ferrara	·345137
Firenze	·339542

Città	Valore della libb. med. in chil.
Genova	·316750
Lodi	·320735
Lucca	·334500
Milano	·326793
Modena	·340457
Napoli	·320759
Palermo	·317368
Parma	·328000
Piacenza	·317517
Soncino	·315000
Sondrio	·420008
Soresina	·286500
Torino	·307400
Urbino	·325508

Suddivisione della libbra medica.

Napoli. Libbra: 12 once, 10 dramme, 3 scrupoli o trappesi, 20 grani o acini.

Piemonte, Sardegna, Sicilia e **Sondrio**. Libbra: 12 once, 8 dramme, 3 scrupoli, 20 grani.

Negli altri paesi. Libbra: 12 once, 8 dramme, 3 scrupoli, 24 grani.

In Toscana, Sicilia e Modena la libbra medicinale è uguale alla mercantile.

La libbra di Sondrio è uguale a quella di Vienna, che venne prescritta fin dal 1823 per la Lombardia, e che mai fu messa in uso.

Monete.

La lira di Torino si divideva in 20 soldi ed il soldo in 12 denari.

La lira italiana o nuova di Torino è uguale al franco, e si divide in decimi, centesimi, millesimi, ecc.

	Lire italiane
Francia. Lira tornese: 20 soldi, 12 den.	·99
Inghilterra. Pound (lira) sterling: 20 shillings, 12 pence, 4 farthings . .	25·21
Lombardia. Fiorino austriaco: 100 soldi, 10 decimi	2·469$\frac{11}{81}$
Zvanziga nuova: 100 centesimi . . .	·864$\frac{16}{81}$
Zvanziga vecchia 100 centesimi . . .	·839$\frac{41}{81}$
Modena. Lira vecchia: 20 soldi o bolognini, 12 denari	·305
Napoli e **Sicilia**. Ducato: 100 grana, 10 cavalli	4·250
Onza: 30 tarì, 20 grana, 6 piccoli . .	12·750
Parma. Lira vecchia: 20 soldi . . .	·200
Portogallo. Mille reis	6·03
Prussia. Tallero	3·71
Roma. Come per le romagne. Nelle tavole del dicastero del Censo romano allo scudo si attribuisce il valore di it. lire . .	5·3673
Romagne, ecc. Scudo: 10 paoli, 10 baiocchi, 10 denari	5·320
Grosso = baiocchi 5.	
Russia. Rublo	4·00
Spagna. Piastra: 20 reali	5·25
Stati Uniti. Dollaro	5·34
Toscana. Francescone: 10 paoli, 8 crazie, 5 quattrini, 4 denari	5·600
Fiorino: 100 quattrini, 4 denari . . .	1·400
Lira vecchia: 20 soldi, 12 denari . .	·840
Scudo fiorentino: 7 lire, 20 soldi . .	5·880
Lira lucchese: 20 soldi, 12 denari . .	·746$\frac{2}{3}$
Pezza livornese: 20 soldi, 12 denari .	4·830

Monete antiche.

Talento attico d'oro (Grecia)	55608·99
Id. d'argento id.	5560·89

	Lire italiane
Talento attico cominciando dal II secolo av. C.	5222·41
Id. d'Egina o di Corinto	9268·17
Aureus o solidus (Roma)	20·38
Denarius . . . (id.)	·81
Quinarius . . . (id.)	·40
Sesterzio (nummus) (id.)	·20
Dupondius . . (id.)	·16
As, libella o assipondium, fino all'anno 536 di Roma	·08
Id. dal 536 al 720 di Roma	·05
Sembella, prima del 536	·04
Teruncius, (id.)	·02
Sembella, dopo il 536 di Roma	·025
Teruncius, id.	·0125
Denaro (sotto Augusto)	·79
Id. (sotto Tiberio e Claudio)	·78
Id. (sotto Nerone)	·73
Id. (sotto Galba e Domiziano)	·70
Talento di Babilonia	7407·38
Id. di Mosè	6172·82

Le vecchie monete lasciate in corso legale nelle varie provincie d'Italia, col R. Decreto 17 luglio 1861, sono le seguenti:

PROVINCIE DI SICILIA E NAPOLI.

Ducato $t = 833\frac{1}{3}, p = 19^g \cdot 119$(*)	4·25
Piastra o pezzo da 12 carlini napolitani o 12 tarì siciliani	5·10
Mezza piastra	2·55
Pezzo da 20 grana ossia 2 carlini napolitani, o 2 tarì siciliani	·85
Carlino napolitano o tarì siciliano . . .	·425
Oncia di conto per la Sicilia	12·75

(*) In questa tavola t significa titolo della moneta, e p peso di essa.

Provincie della Romagna, dell'Umbria e delle Marche

	Lire italiane
Oro	
Pezzo da 5 scudi (metà e doppio in proporzione) $t=900$, $p=8^g \cdot 668$	26·60
Doppia $t=917$, $p=5^g \cdot 469$	17·07
Scudo $t=900$, $p=1^g \cdot 733$	5·32
Argento	
Scudo $t=900$, $p=26^g \cdot 898$	5·32
Mezzo scudo o pezzo da 50 baiocchi . .	2·66
Testone o pezzo da tre paoli o trenta baiocchi $t=917$, $p=7^g \cdot 450$	1·596
Papetto o pezzo da due paoli o venti baiocchi $p=4^g \cdot 710$	1·064
Paolo o pezzo da dieci baiocchi $p=2^g \cdot 095$	·532
Mezzo paolo o pezzo da cinque baiocchi $p=0^g \cdot 945$	·266

Provincie di Toscana.

Francescone o pezzo da paoli dieci $t=916$, $p=26^g \cdot 972$	5·60
Franceschino o pezzo da paoli cinque . .	2·80
Fiorino o pezzo da paoli due e mezzo . .	1·40

Provincie di Modena.

Argento	
Scudo d'Ercole III co' suoi spezzati in proporzione $t=910$, $p=27^g \cdot 693$	5·60
Scudo di Francesco III $t=861$, $p=28^g \cdot 968$	5·54
Eroso-misto	
Ducato	2·80
Scudo dell'aquila	1·42

	Lire italiane
Quarantana	·65
Lira di Modena	·305

PROVINCIE DI PARMA.

Oro

Doppia (moltipli e sottomoltipli in proporzione) t=891, p=7g ·141	21·92

Argento

Ducato (metà in proporzione) t=902, p=25g ·704	5·15
Pezzo da lire sei (spezzati in proporzione) t=833, p=7g ·344	1·36

Eroso-misto.

Pezzo da venti soldi di Parma	·20
Pezzo da dieci soldi id.	·10

PROVINCIE DI LOMBARDIA.

Argento.

Fiorino di nuova valuta austriaca t=900, p=12g ·345$\frac{55}{81}$	2·46$\frac{74}{81}$
Moltipli (cioè doppio fiorino, tallero e doppio tallero della lega) in proporzione.	

Eroso-misto.

Quarto di fiorino suddetto	·61$\frac{59}{81}$
Centesimi dieci di fiorino	·24
Centesimi cinque di fiorino	·12
Lira austriaca o svanziga di nuovo conio . .	·86$\frac{34}{81}$
Mezza id. . .	·41$\frac{79}{81}$
Quarto id. . .	·20$\frac{80}{81}$
Svanziga austriaca di vecchio conio . . .	·83$\frac{77}{81}$
Mezza id. . . .	·41$\frac{79}{81}$
Quarto id. . . .	·20$\frac{80}{81}$
Carantani tre id. . . .	·12$\frac{28}{81}$

	Lire italiane
Pezzo da otto soldi di Piemonte	·40
Pezzo da quattro soldi id.	·20

Provincie Sarde.

Oro.

Doppia di Savoia (moltipli e spezzati in proporzione) t=905, p=9g ·116	28·45
Quadruplo di Genova (spezzati in proporzione) t=909½, p=25g ·214	79·00
Carlino t=891, p=16g ·053	50·00
Mezzo carlino t=891, p=8g ·026 . . .	25·00
Doppietta t=891, p=3g ·210	10·00

Argento.

Scudo vecchio di Piemonte (spezzati in proporzione) t=904, p=35g ·164	7·10
Scudo di Sardegna t=895, p=23g ·587 .	4·80
Mezzo scudo t=895, p=11g ·793 . . .	2·40
Quarto di scudo t=895, p=5g ·897 . . .	1·20

Eroso-misto.

Pezzo da otto soldi di Piemonte	·40
Pezzo da quattro id.	·20
Reale	·48
Mezzo reale	·24

Con decreti posteriori quasi tutte le precedenti monete furono tolte al corso legale e ritirate.

FINE

INDICE

DELLE MATERIE

Digitized by Google

Digitized by Google

783647